

单体的集合のホモトピー論

山崎 晃司 東京工業大学

2020年7月27日

記号一覧

Set: 集合と写像の圏

Top: 位相空間と連続写像の圏

SSet 単体的集合: 集合と写像の圏

Top: 位相空間と連続写像の圏

$Nat(-, -)$: 自然変換の集合

$\mathbb{R}_K L: K$ に沿った L の右 Kan 拡張

$\mathbb{L}_K L: K$ に沿った L の左 Kan 拡張

目次

第 0 章 導入	5
第 1 章 モデル圏	7
1.1 圏論からの準備	7
1.1.1 エンドとコエンド	7
1.1.2 Kan 拡張	9
1.2 モデル圏	16
1.2.1 モデル圏の定義	17
1.2.2 余束生成モデル圏	18
1.2.3 相対セル複体の基本性質	20
1.2.4 小対象引数と射の分解	21
1.2.5 定理 1.2.10 の証明	23
1.2.6 モデル構造の生成	23
1.2.7 モデル構造の推移	25
第 2 章 単体的集合	27
2.1 単体的集合	27
2.1.1 単体的集合	27
2.1.2 幾何学的実現	29
2.1.3 単体圏の性質	30
2.1.4 \mathbf{Top} 上のホモトピー論	31
2.1.5 単体的ホモトピー	35
2.1.6 \mathbf{SSet} のモデル圏構造	36
2.1.7 幾何学的実現は左完全	40
2.1.8 Kan 束	42
2.1.9 ループ空間と連結性	49
2.1.10 モデル圏としての \mathbf{SSet}	61

第0章 導入

私が用意した一般的でない用語の右上には[†]をつけています。

ホモトピー論といっても様々な分野があるが、ここで言うホモトピー論とはホモトピー群の理論のことだと思ってよい。ただし、明示的にホモトピー群を持ち出すことはほとんどなく、可能な限りモデル圏構造周辺的话题を取り上げる予定である。(個人的なこだわりで、高次ホモトピー群は“シフト関手”を用いて定義されるべきだと考えているからである。)

モデル圏とは、大まかに言えばホモトピー論が展開できる圏のことである。しかし、モデル圏の公理は非常に強く、ある圏がモデル圏であることを確かめるのは容易ではない。実際、代表的なモデル圏である **Top** や **SSet** について、多くのテキストではモデル圏構造に触れることなくホモトピー論を展開した後、その一般化としてモデル圏の公理を導入するという順序になっている。というのも、**Top** や **SSet** がモデル圏の公理を満たすことを証明するためには結局、ホモトピー論におけるほとんどすべての概念を説明する必要があるからである。本書ではそのような説明は最低限にして、最短経路で **Top** や **SSet** がモデル圏の公理を満たすことの証明を試みた。このことの恩恵がどれほどあるかわからないが、いくつかの有名な結果がモデル圏の一般論から直ちに従うことを示してみる。

第1章 モデル圏

1.1 圏論からの準備

1.1.1 エンドとコエンド

まず、自然変換の一般化を用意する。

定義 1.1.1 (対角自然変換). C, D を圏とする。二つの関手 $F, G : C^{op} \times C \rightarrow D$ に対し、対角自然変換 $\mu : F \rightarrow G$ とは、各 $x \in Ob(C)$ に対し D 上の射 $\mu_x : F(x, x) \rightarrow G(x, x)$ を対応させ、 C 上の任意の射 $f : x \rightarrow y$ に対して次の図式を可換にするもののである。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(x, x) & \xrightarrow{\mu_x} & G(x, x) \\
 & \nearrow^{F(f, x)} & & & \searrow^{G(x, f)} \\
 F(y, x) & & & & G(x, y) \\
 & \searrow_{F(y, f)} & & & \nearrow_{G(f, y)} \\
 & & F(y, y) & \xrightarrow{\mu_y} & G(y, y)
 \end{array}$$

例 1.1.2 (自然変換). C, D を圏とする。二つの関手 $F, G : C \rightarrow D$ に対し、合成関手 $F \circ pr_2, G \circ pr_2 : C^{op} \times C \rightarrow D$ を考える。対角自然変換 $F \circ pr_2 \rightarrow G \circ pr_2$ とは、自然変換 $F \rightarrow G$ のことである。

対角自然変換自体にも多くの例が存在するが、ここでは触れない。次の特別な場合を考える。

定義 1.1.3 (くさび). I, C を圏とする。 $S : I^{op} \times I \rightarrow C$ は関手とし、 C 上の対象 a をとる。 a から S へのくさび (wedge) とは、対角自然変換 $a \rightarrow S$ のことである。 S から a へのくさび、または余くさび (cowedge) とは、対角自然変換 $S \rightarrow a$ のことである。

普遍的な自然変換を考えたように、普遍的なくさびについて定義する。

定義 1.1.4 (エンド・コエンド). I, C を圏とする。 $S : I^{op} \times I \rightarrow C$ は関手とする。 S のエンド (end) または末端くさび (ending wedge) または普遍くさび (universal wedge) とは、 C 上の対象 e と e から S へのくさび $\omega : e \rightarrow S$ の組 (e, ω) であって、次の普遍性を満たすものである。

任意のくさび $\mu : x \rightarrow S$ に対し、唯一つの射 $h : x \rightarrow e$ が存在し、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
 & S(i, i) & \\
 \mu_i \nearrow & & \uparrow \omega_i \\
 x & \xrightarrow{h} & e \\
 \mu_j \searrow & & \downarrow \omega_j \\
 & S(j, j) &
 \end{array}$$

S のエンドを $\int_i S(i, i)$ と書く。

エンドの双対をコエンド (coend) と呼び、 S のコエンドを $\int^i S(i, i)$ と書く。

例 1.1.5. 二つの関手 $F, G : C \rightarrow D$ に対し次の同型が成り立つ。

$$Nat(F, G) \cong \int_c Hom_D(F(c), G(c))$$

ただし、 $Nat(F, G)$ は自然変換 $F \rightarrow G$ 全体の集合としている。

実際、各対象 $c \in Ob(C)$ に対して $\sigma_c : Nat(F, G) \rightarrow Hom_D(F(c), G(c))$ を $\sigma_c(\mu) = \mu_c$ で定めるとこれはくさび $\sigma : Nat(F, G) \rightarrow Hom_D(F(-), G(-))$ を定める。また、任意のくさび $\tau : X \rightarrow Hom_D(F(-), G(-))$ は、各対象 $c \in Ob(C)$ と各元 $x \in X$ に対して射 $\tau_c^x : F(c) \rightarrow G(c)$ を割り当てる。くさびの自然性から、 $c \mapsto \tau_c^x$ は自然変換 $\tau^x : F \rightarrow G$ を定める。これによって定まる $X \rightarrow Nat(F, G); x \mapsto \tau^x$ は適切な図式を可換にするカノニカルな射である。逆に、そのようなカノニカルな射は、存在すれば上記の形でなければならない。以上より、 $Nat(F, G)$ は確かに普遍的なくさびである。

エンドは極限の形で書くこともできる。これにより、エンド・コエンドの存在は極限・余極限の存在に帰着される。

定義 1.1.6 (ねじれ射圏). I を圏とする。 I のねじれ射圏 (twisted arrow category) とは、次のように定義される圏 $I_{\#}$ のことである。

- $Ob(I_{\#}) \stackrel{\text{def}}{=} Mor(I)$
- $I_{\#}$ 上の射 $(h, k) : f \rightarrow g$ は、次の図式を可換とする二つの射 h, k の組である。

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xleftarrow{h} & \cdot \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 \cdot & \xrightarrow{k} & \cdot
 \end{array}$$

$I_{\#} = ((I^{op})_{\#})^{op}$ を I の余ねじれ射圏 \dagger と呼ぶことにする。

ここで、関手 $I_{\#} \rightarrow I^{op} \times I; (h, k) \mapsto (h, k)$ を K と表す。

命題 1.1.7. I, C を圏とする。関手 $I_{\#} \rightarrow I^{op} \times I; (h, k) \mapsto (h, k)$ を K と表す。関手 $S : I^{op} \times I \rightarrow C$ に対し、くさび $x \mapsto S$ と自然変換 $x \rightarrow S \circ K$ が一対一に対応する。特に、次の同型が成り立つ。

$$\int_i S(i, i) \cong \lim_{\leftarrow f} S \circ K(f)$$

注意 1.1.8. ここで、コエンドについて

$$\int^i S(i, i) \cong \lim_{\rightarrow f} S \circ K(f)$$

は成り立たない。コエンドを余極限の形で書く時は余ねじれ射圏を用意する必要がある。

累次エンドと Fubini の定理

エンドを積分の形で書いたが、これは積分と同様に“重積分の交換”（すなわち、“Fubini の定理”）が成り立つ。これを説明する。

命題 1.1.9. I, J, C を圏とする。 $S : I^{op} \times I \times J^{op} \times J \rightarrow C$ は関手とする。 $\int_i \int_j S(i, i, j, j)$, $\int_j \int_i S(i, i, j, j)$, $\int_{(i,j)} S(i, i, j, j)$ のいずれかが存在した時、残りの二つも存在し、すべて同型である。

証明. $I_{\#} \times J_{\#} \cong (I \times J)_{\#}$ より、極限の交換の議論に帰着される。よって明らか。 \square

1.1.2 Kan 拡張

Kan 拡張は圏論における多くの概念を内包する抽象的な概念である。圏論自体がただでさえ抽象的な枠組みであるので、あらゆる分野の多くの概念を Kan 拡張の言葉で翻訳することもできるが、そのような試みはアブストラクト・ナンセンスであると言われてしまうかもしれない。一方で、ホモトピー論においては Kan 拡張が明示的に現れ、非常に強力な道具でもある。例えば、導来関手や幾何学的実現は Kan 拡張である。また、Kan 拡張の一般論からモデル圏の間の Quillen 随伴が導かれたりする。ここではそのような応用を目指して Kan 拡張についてまとめていく。

C, D, I を圏とし、 $K : I \rightarrow C$ を関手とする。この時、関手圏の間の関手 $K^* : D^C \rightarrow D^I$ が導かれる。関手 $L \in D^I$ の K に沿った右 Kan 拡張 (rep. 左 Kan 拡張) とは、 K^* から L への (resp. L から K^* への) 普遍射のことである。

具体的には次のように定義される。

定義 1.1.10 (右 Kan 拡張). C, D, I を圏とし、 $K : I \rightarrow C$ を関手とする。関手 $L : I \rightarrow D$ の K に沿った右 Kan 拡張とは、関手 $\mathbb{R}_K L : C \rightarrow D$ と自然変換 $\epsilon : \mathbb{R}_K L \circ K \rightarrow L$ の組で、次の普遍性を満たすもののことである。

任意の関手 $F : C \rightarrow D$ と自然変換 $\mu : F \circ K \rightarrow L$ に対し、自然変換 $\hat{\mu} : F \rightarrow \mathbb{R}_K L$ であって $\epsilon \circ K^*(\hat{\mu}) = \mu$ なるものがただ一つ存在する。

図式で表すと次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} C & & \\ K \uparrow & \searrow^{\mathbb{R}_K L} & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array} & & \\
 \\
 \begin{array}{ccc} C & & \\ K \uparrow & \searrow^F & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccccc} F & \cdots & F \circ K & & \\ \hat{\mu} \downarrow & & K^*(\hat{\mu}) \downarrow & \searrow^{\mu} & \\ \mathbb{R}_K L & \cdots & \mathbb{R}_K L \circ K & \xrightarrow{\epsilon} & L \end{array}
 \end{array}$$

定義 1.1.11 (左 Kan 拡張). C, D, I を圏とし、 $K : I \rightarrow C$ を関手とする。関手 $L : I \rightarrow D$ の K に沿った左 Kan 拡張とは、関手 $L^{op} : I^{op} \rightarrow D^{op}$ の $K^{op} : I^{op} \rightarrow C^{op}$ に沿った右 Kan 拡張のことである。具体的には次のように定義される。

関手 $L : I \rightarrow D$ の K に沿った左 Kan 拡張とは、関手 $\mathbb{L}_K L : C \rightarrow D$ と自然変換 $\eta : L \rightarrow \mathbb{L}_K L \circ K$ の組で、次の普遍性を満たすもののことである。

任意の関手 $F : C \rightarrow D$ と自然変換 $\mu : L \rightarrow F \circ K$ に対し、自然変換 $\hat{\mu} : \mathbb{L}_K L \rightarrow F$ であって $K^*(\hat{\mu}) \circ \eta = \mu$ なるものがただ一つ存在する。

図式で表すと次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} C & & \\ K \uparrow & \searrow^{\mathbb{L}_K L} & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array} & & \\
 \\
 \begin{array}{ccc} C & & \\ K \uparrow & \searrow^F & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccccc} F & \cdots & F \circ K & & \\ \hat{\mu} \uparrow & & K^*(\hat{\mu}) \uparrow & \swarrow^{\mu} & \\ \mathbb{L}_K L & \cdots & \mathbb{L}_K L \circ K & \xleftarrow{\eta} & L \end{array}
 \end{array}$$

簡単な例を見てみる。次の例は、後の例 1.1.17 から導くこともできる。

例 1.1.12. $K : I \rightarrow C$ を任意の関手とし、任意の対象 $i \in Ob(I)$ を固定する。 $\hat{H}_i = Hom_C(K(i), -) : C \rightarrow \mathbf{Set}$ とし、自然変換 $\eta : H_i \rightarrow \hat{H}_i \circ K$ を $\eta_j(f) = K(f)$ として定め

る。これが $H_i = \text{Hom}_I(i, -)$ の K に沿った左 Kan 拡張を定めることを見てみよう。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow K & \searrow \hat{H}_i \\ I & \xrightarrow{H_i} & \mathbf{Set} \\ & \eta \uparrow & \end{array}$$

任意の関手 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ および任意の自然変換 $\mu : H_i \rightarrow F \circ K$ をとる。仮に、自然変換 $\hat{\mu} : \hat{H}_i \rightarrow F$ であって $K^*(\hat{\mu}) \circ \eta = \mu$ なるものが存在したとする。このとき、任意の $c \in C$ に対し、 $\hat{\mu}_c : \text{Hom}_C(K(i), c) \rightarrow F(c)$ は、次を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_c(f) &= \hat{\mu}_c(f_*(id)) \\ &= F(f)(\hat{\mu}_{K(i)}(id)) \\ &= F(f)(\mu(id_i)) \end{aligned}$$

すなわち、 $\hat{\mu}$ は μ のみによって定まるので、存在すれば一意である。

逆に、 $\hat{\mu}_c(f) = F(f)(\mu(id_i))$ で $\hat{\mu}$ を定めると、これは自然であり、 $K^*(\hat{\mu}) \circ \eta = \mu$ を満たす。よって、 \hat{H}_i と η の組は H_i の K に沿った左 Kan 拡張を定める。

各点 Kan 拡張

右 Kan 拡張は極限を使って表すことができる。(双対的に、左 Kan 拡張は余極限を使って表すことができる。) 証明は別紙にまとめた。

命題 1.1.13 (各点 Kan 拡張). C, D, I を圏とし、 $K : I \rightarrow C$ を関手とする。関手 $L : I \rightarrow D$ について、各対象 $c \in \text{Ob}(C)$ に対して $L_c = L \circ \text{pr}_2 : (c \downarrow K) \rightarrow I \rightarrow D$ が極限 $\lim_{\leftarrow} L_c$ を持ったとする。この時、 L の K に沿った右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_K L$ が存在し、自然に $\mathbb{R}_K L(c) \cong \lim_{\leftarrow} L_c$ である。(ここで、 $(c \downarrow K)$ はコンマ圏である。)

定義 1.1.14. 右 Kan 拡張が上記のような極限で表されるとき、右 Kan 拡張を各点的 (*point-wise*) であると呼ぶ。各点的な右 Kan 拡張を各点右 Kan 拡張と呼ぶ。

各点 Kan 拡張の特徴づけのため、次の補題を用意する。

補題 1.1.15. 次の関手による図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow K & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array}$$

各対象 $c \in \text{Ob}(C)$ に対して $L_c = L \circ \text{pr}_2 : (c \downarrow K) \rightarrow I \rightarrow D$ と置き、各対象 $d \in \text{Ob}(D)$ に対して $\Delta_d : (c \downarrow K) \rightarrow D$ は d のみに値を持つ定値関手とする。この時、次の自然な全単射が存在する。

$$\text{Nat}(\Delta_d, L_c) \cong \text{Nat}(\text{Hom}_C(c, K(-)), \text{Hom}_D(d, L(-)))$$

証明. 自然変換 $\Delta_d \rightarrow L_c$ は、 $(c \downarrow K)$ 上の各対象 $c \rightarrow K(i)$ に対し、 $d \rightarrow L(i)$ を割り当てる。すなわち、写像 $Hom_C(c, K(i)) \rightarrow Hom_D(d, L(i))$ が定まる。 $\Delta_d \rightarrow L_c$ の自然性より、この対応は自然である。逆の対応も容易に構成できる。 \square

各点 Kan 拡張は次の特徴づけができる。

命題 1.1.16. 次のような関手と自然変換の図式が存在したとする。 $(\mathbb{R}_K L$ が右 Kan 拡張であるとは仮定しない。)

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow K & \searrow \mathbb{R}_K L \\ I & \xrightarrow{L} & D \\ & \downarrow \epsilon & \end{array}$$

この時、以下は同値である。

1. $\mathbb{R}_K L$ は各点 Kan 拡張である。
2. 任意の $d \in Ob(D)$ に対し $Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(-))$ と $Hom_D(d, \epsilon)$ は $Hom_D(d, L(-))$ の K による右 Kan 拡張を定める。
3. 次の自然な対応が全単射である。

$$Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(c)) \rightarrow Nat(Hom_C(c, K(-)), Hom_D(d, L(-))); f \mapsto Hom_D(d, \epsilon) \circ K^*(\mu^f)$$

ただし、 $c \in Ob(C)$ 、 $d \in Ob(D)$ で、 μ^f は米田の補題により f と対応する自然変換である。

$\mathbb{R}_K L$ が各点的であるとき、かつその時に限り、任意の $d \in Ob(D)$ に対し $Hom_D(d, -) : D \rightarrow \mathbf{Set}$ は右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_K L$ を保つ。

証明. $Hom_D(d, -) : D \rightarrow \mathbf{Set}$ は極限を保つので、 $\mathbb{R}_K L$ が各点的ならば右 Kan 拡張 $\mathbb{R}_K L$ を保つ。よって 1. \Rightarrow 2. が言えた。

2. を仮定すると、任意の関手 $F : C \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、次の自然な全単射が存在する。

$$Nat(F, Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(-))) \cong Nat(F \circ K, Hom_D(d, L(-))); \mu \mapsto Hom_D(d, \epsilon) \circ K^*(\mu)$$

特に、 $F = Hom_C(c, -)$ とすれば次の自然な全単射を得る。

$$Nat(Hom_C(c, -), Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(-))) \cong Nat(Hom_C(c, K(-)), Hom_D(d, L(-)))$$

左辺に米田の補題を適用すれば 3. を得る。

3. を仮定する。すなわち、次の自然な対応が全単射であったとする。

$$Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(c)) \cong Nat(Hom_C(c, K(-)), Hom_D(d, L(-)))$$

右辺に先ほどの補題を適用すると、次の同型を得る。

$$Hom_D(d, \mathbb{R}_K L(c)) \cong Nat(\Delta_d, L_c)$$

これは、 $\mathbb{R}_K L(c)$ が L_c の極限の普遍性を満たすことを示している。 \square

例 1.1.17. $K : I \rightarrow C$ を任意の関手とし、 $y : I \rightarrow \mathbf{Set}^{I^{op}}$ を米田埋め込み $i \mapsto Hom_I(-, i)$ とする。 $\mathbf{Set}^{I^{op}}$ は余完備だから、 y の K に沿った各点左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_K y : C \rightarrow \mathbf{Set}^{I^{op}}$ が存在する。これを具体的に与えてみる。

関手 $y_K : C \rightarrow \mathbf{Set}^{I^{op}}$ を $c \mapsto Hom_C(K(-), c)$ として定め、自然変換 $\eta : y \rightarrow y_K \circ K$ を $\eta_i : Hom_I(-, i) \rightarrow Hom_C(K(-), K(i)); f \mapsto K(f)$ として定める。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow K & \searrow y_K \\ I & \xrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{I^{op}} \end{array}$$

この時、米田の補題より、 $i \in Ob(I)$ と $F \in Ob(\mathbf{Set}^{I^{op}})$ に対して自然な次の全単射 ϕ が存在する。

$$F(i) \cong Nat(y(i), F); x \mapsto \mu^x$$

よって、 $c \in Ob(C)$ と $F \in Ob(\mathbf{Set}^{I^{op}})$ に対して自然な次の全単射 ϕ_* が存在する。

$$Nat(y_K(c), F) \cong Nat(Hom_C(K(-), c), Nat(y(-), F)); \sigma \mapsto \phi \circ \sigma$$

ここで、各 $\sigma : y_K(c) \rightarrow F$ に対し、米田同型で対応する自然変換を $\mu^\sigma : Hom_C(-, c) \rightarrow Nat(y_K(-), F)$ と表し、 $Nat(\eta, F) \circ K^*(\mu^\sigma) : Hom_C(K(-), c) \rightarrow Nat(y(-), F)$ を計算してみる。

各射 $f : K(i) \rightarrow c$ に対し、

$$\begin{aligned} \mu_{K(i)}^\sigma(f) &= Nat(y_K(f), F)(\sigma) \\ &= (f_*)^*(\sigma) \\ &= \sigma \circ f_* : Hom_C(K(-), K(i)) \rightarrow F \end{aligned}$$

これに $\eta^* = Nat(\eta, F)$ を作用させると、 $\sigma \circ f_* \circ \eta : Hom_I(-, i) \rightarrow F$ となる。

一方、 $\phi(\sigma_i(f)) : Hom_I(-, i) \rightarrow F$ は、次のように計算できる。各射 $k : j \rightarrow i$ に対し、

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_i(f))(k) &= F(k)(\sigma_i(f)) \\ &= \sigma_j(k^*(f)) \quad (\sigma \text{ の自然性}) \\ &= \sigma_j(f \circ K(k)) \\ &= \sigma \circ f_* \circ \eta(k) \end{aligned}$$

すなわち、 $Nat(\eta, F) \circ K^*(\mu^\sigma)$ は全単射 ϕ_* に一致する。よって、命題 1.1.16 の双対より y_K と η は K に沿った y の左 Kan 拡張を与える。

さらに、命題 1.1.16 の 2. の双対より、任意の前層 $F \in Ob(\mathbf{Set}^{I^{op}})$ に対し $Nat(y_K(-), F) : C \rightarrow \mathbf{Set}^{op}$ と $Nat(\eta, F)$ は $Nat(y(-), F) : I \rightarrow \mathbf{Set}^{op}$ の K による左 Kan 拡張を定める。特に、任意の対象 $i \in Ob(I)$ に対して $F = Hom_I(-, i)$ の場合を考えれば、米田の補題より、 $Hom_C(K(-), i)$ は $Hom_I(-, i)$ の K による左 Kan 拡張である。これは、例 1.1.12 の双対である。

左 Kan 拡張のコエンドによる表現

右 Kan 拡張はエンドを用いて表すこともできる。この後の応用を想定して、左 Kan 拡張をコエンドを用いて表してみる。

命題 1.1.18 (コエンドによる表現). 関手による次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \uparrow K & \\ I & \xrightarrow{L} & D \end{array}$$

任意の $i, j \in \text{Ob}(I)$ と任意の $c \in \text{Ob}(C)$ に対し、余冪 $\coprod_{\text{Hom}_C(K(j), c)} L(i)$ が存在したとする。

さらに、任意の $c \in \text{Ob}(C)$ に対し以下のコエンドが存在したとすると、 L の K に沿った左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_K L : C \rightarrow D$ が存在し、以下の同型を満たす。

$$\mathbb{L}_K L(c) \cong \int^i \coprod_{\text{Hom}_C(K(i), c)} L(i)$$

証明. 関手 $\mathbb{L}_K L : C \rightarrow D$ を次で定める。

$$\mathbb{L}_K L(c) = \int^i \coprod_{\text{Hom}_C(K(i), c)} L(i)$$

これが確かに L の K に沿った左 Kan 拡張になることを示す。

任意の関手 $F : C \rightarrow D$ に対し、

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(L(i), F(K(i))) &\cong \text{Nat}(\text{Hom}_C(K(i), -), \text{Hom}_D(L(i), F(-))) && \text{(米田の補題)} \\ &\cong \int_c \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_C(K(i), c), \text{Hom}_D(L(i), F(c))) && \text{(例 1.1.5)} \end{aligned}$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\mathbb{L}_K L, F) &\cong \int_c \text{Hom}_D(\mathbb{L}_K L(c), F(c)) && \text{(例 1.1.5)} \\ &\cong \int_c \text{Hom}_D\left(\int^i \coprod_{\text{Hom}_C(K(i), c)} L(i), F(c)\right) && \text{(\mathbb{L}_K L の定義)} \\ &\cong \int_c \int_i \text{Hom}_D\left(\coprod_{\text{Hom}_C(K(i), c)} L(i), F(c)\right) && \text{(Hom 関手は極限を保つ)} \\ &\cong \int_c \int_i \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_C(K(i), c), \text{Hom}_D(L(i), F(c))) && \text{(余冪の普遍性)} \\ &\cong \int_i \int_c \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_C(K(i), c), \text{Hom}_D(L(i), F(c))) && \text{(Fubini の定理)} \\ &\cong \int_i \text{Hom}_D(L(i), F(K(i))) && \text{(上記の等式)} \\ &\cong \text{Nat}(L, F \circ K) && \text{(例 1.1.5)} \end{aligned}$$

この自然同型は左 Kan 拡張の普遍性を意味する。 □

米田埋め込みと随伴

例 1.1.17 から次がわかる。

命題 1.1.19. $K : I \rightarrow C$ を任意の関手とし、 $y : I \rightarrow \mathbf{Set}^{I^{op}}$ を米田埋め込み $i \mapsto Hom_I(-, i)$ とする。この時、 K の y に沿った左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_K y$ が存在し、各点的であるならば、随伴 $\mathbb{L}_y K \dashv \mathbb{L}_K y$ が存在する。

証明.

$$\begin{aligned} Hom(\mathbb{L}_y K(F), c) &\cong F(k)(\sigma_i(f)) \\ &\cong Nat(Nat(y(-), F), Hom_C(K(-), c)) \quad (\text{命題 1.1.16 の双対}) \\ &\cong Nat(F, Hom_C(K(-), c)) \quad (\text{米田の補題}) \\ &= Nat(F, y_K(c)) \end{aligned}$$

例 1.1.17 より $y_K \cong \mathbb{L}_K y$ である。 □

また、米田埋め込みは次の性質を満たす。

定義 1.1.20. 関手 $K : I \rightarrow C$ が稠密であるとは、 $Id_C : C \rightarrow C$ と $id_K : K \rightarrow K$ の組が K の K に沿った各点左 Kan 拡張になることである。

具体的には、各対象 $c \in Ob(C)$ に対して $K_c = K \circ pr_1 : (K \downarrow c) \rightarrow I \rightarrow C$ の余極限 $\varinjlim K_c$ が c と同型になることである。

双対的に、関手 $K : I \rightarrow C$ が余稠密であるとは、 $Id_C : C \rightarrow C$ と $id_K : K \rightarrow K$ の組が K の K に沿った各点右 Kan 拡張になることである。

命題 1.1.21. 関手 $K : I \rightarrow C$ が余稠密であるとき、かつその時に限り、次の対応が全単射である。

$$Nat(Hom_C(c, -), Hom_C(d, -)) \rightarrow Nat(Hom_C(c, K(-)), Hom_C(d, K(-))); \mu \mapsto K^*(\mu)$$

この条件は、左辺を米田の補題で置き換えれば、次の対応が同型であることと同値である。

$$Hom_C(d, c) \rightarrow Nat(Hom_C(c, K(-)), Hom_C(d, K(-))); f \mapsto f^*$$

証明. 命題 1.1.16 より明らか。 □

例 1.1.22. 例 1.1.17 で特に $K = y$ の場合を考える。 $y_y(F) = Nat(y(-), F)$, $\eta_i(f) = f_*$ である。すなわち、米田の補題によって $y_y \cong Id$, $\eta \cong id$ である。よって、米田埋め込み y は稠密である。

さらに、次の性質も一般にわかる。

命題 1.1.23. K が充満忠実ならば、 L の K に沿った各点左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_K L$, η について、 η は自然同型である。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \nearrow \mathbb{L}_K L & \\ K \uparrow & & \searrow \\ I & \xrightarrow{L} & D \\ & \eta \uparrow & \end{array}$$

証明. K が充満忠実だから、任意の対象 $i \in \text{Ob}(I)$ に対し、コマ圏 $(K(i) \downarrow K)$ は I の射 $i \rightarrow \cdot$ からなるスライス圏に同型である。よって、 L を合成した余極限は $L(i)$ と同型である。 \square

命題 1.1.19 をもう少し一般化して、次の命題が成り立つ。

命題 1.1.24. 関手による次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow \mathbb{L}_K L & \\ K & \uparrow & \\ I & \xrightarrow{L} & D \\ & \searrow \mathbb{L}_L K & \end{array}$$

L は稠密かつ充満忠実で、任意の $i \in \text{Ob}(I)$ に対し、関手 $\text{Hom}_D(L(i), -) : D \rightarrow \mathbf{Set}$ がすべての余極限を保つとする。(米田埋め込みを L としたとき、米田の補題よりこの性質を満たすことに注意。)

L の K に沿った左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_K L$ および K の L に沿った左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_L K$ が存在し、 $\mathbb{L}_K L$ と $\mathbb{L}_L K$ が各点的であったとする。この時、随伴 $\mathbb{L}_L K \dashv \mathbb{L}_K L$ が存在する。

証明.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(d, \mathbb{L}_K L(c)) &\cong \text{Hom}_D(\varinjlim_{L(i) \rightarrow d} L(i), \mathbb{L}_K L(c)) && (L \text{ は稠密}) \\ &\cong \varprojlim_{L(i) \rightarrow d} \text{Hom}_D(L(i), \mathbb{L}_K L(c)) && (\text{Hom 関手は極限を保つ}) \\ &\cong \varprojlim_{L(i) \rightarrow d} \text{Hom}_D(L(i), \varinjlim_{K(j) \rightarrow d} L(j)) && (\text{各点 Kan 拡張}) \\ &\cong \varprojlim_{L(i) \rightarrow d} \varinjlim_{K(j) \rightarrow d} \text{Hom}_D(L(i), L(j)) && (\text{Hom 関手が余極限を保つという仮定}) \\ &\cong \varprojlim_{L(i) \rightarrow d} \varinjlim_{K(j) \rightarrow d} \text{Hom}_I(i, j) && (L \text{ が充満忠実}) \\ &\cong \varprojlim_{L(i) \rightarrow d} \text{Hom}_C(K(i), c) && (\text{例 1.1.12 の各点 Kan 拡張}) \\ &\cong \text{Hom}_C(\varinjlim_{L(i) \rightarrow d} K(i), c) && (\text{Hom 関手は極限を保つ}) \\ &\cong \text{Hom}_C(\mathbb{L}_L K(d), c) && (\mathbb{L}_L K \text{ は各点的}) \end{aligned}$$

\square

1.2 モデル圏

モデル圏とは、大まかに言えばホモトピー論が展開できる圏のことである。モデル圏のことを何も知らない人は、まず Pantodon Web Site[7] の該当ページを読むとよい。日本語では壺大整域 [2] にも pdf がある。本章は主に [4] を参考に行っている。一部、nLab[1] も参考に行っている。

1.2.1 モデル圏の定義

まず、モデル圏で重要なリフト性質について定義しておく。

定義 1.2.1 (リフト性質). 任意の圏 \mathcal{C} 上で考える。

$f: A \rightarrow B$ が $g: X \rightarrow Y$ に対して左リフト性質 (LLP; *Left Lifting Property*) を満たすとは、下のような任意の可換図式に対して、斜めの射 h ですべての図式を可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

f が g に対して右リフト性質 (RLP; *Right Lifting Property*) を満たすとは、 g が f に対して左リフト性質を満たすことである。言い換えると、双対圏 \mathcal{C}^{op} 上で f^{op} が g^{op} に対して左リフト性質を満たすことである。

早速、モデル圏の定義を述べよう。

定義 1.2.2 (モデル圏). 圏 \mathcal{C} がモデル圏であるとは、完備かつ余完備であって、次を満たすような三種の射のクラス $W, \text{Fib}, \text{Cof} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ を備えたもののことである。

- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。
- g が f のレトラクトであったとする。すなわち、次の可換図式が存在したとする。

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ g \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ & & id & & \end{array}$$

このとき、もし $f \in W$ (*resp.* $f \in \text{Fib}$, *or* $f \in \text{Cof}$) ならば $g \in W$ (*resp.* $g \in \text{Fib}$, *or* $g \in \text{Cof}$) である。

- 任意の $f \in W \cap \text{Cof}$ は任意の $g \in \text{Fib}$ に対して左リフト性質を満たす。また、任意の $f \in \text{Cof}$ は任意の $g \in W \cap \text{Fib}$ に対して左リフト性質を満たす。
- 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f = p'_f \circ i'_f$ なる二つの分解で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in W \cap \text{Cof}$, $p'_f \in W \cap \text{Fib}$, $i'_f \in \text{Cof}$ となるものが存在する。さらに、この分解はそれぞれ関手的である。すなわち次を満たす。次の四角形の図式があったとする。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot \end{array}$$

このとき、次の図式を可換にする真ん中の射が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{i_f} & \cdot & \xrightarrow{p_f} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{i_g} & \cdot & \xrightarrow{p_g} & \cdot \end{array}$$

$f \mapsto (i'_f, p'_f)$ についても同様である。

$f \in W$ であるとき、 f は弱同値 (*weak equivalence*) であるという。

$f \in \text{Fib}$ であるとき、 f は束 (*fibration*) であるという。

$f \in \text{Cof}$ であるとき、 f は余束 (*cofibration*) であるという。

$f \in W \cap \text{Fib}$ であるとき、 f は自明な束 (*trivial fibration*) または非輪状束 (*acyclic fibration*) であるという。

$f \in W \cap \text{Cof}$ であるとき、 f は自明な余束 (*trivial cofibration*) または非輪状余束 (*acyclic cofibration*) であるという。

注意 1.2.3. 初期の研究におけるモデル圏の定義では、分解の関手性の仮定は要求されていなかった。しかし、現代的にはこの仮定を課すことが多いと思われる。

fibration の和訳は適当なものがないようである。しかし、Serre fibration は Serre 束と訳するのが普通だと思われるので、ここでは fibration を束と訳すことにした。fibration の直訳は「繊維化」であるし、ここで言う束は bundle の和訳に由来を持つので、少し気持ち悪いが、混乱はないと思われる。詩的に「梳き櫛」などと訳してもいいかもしれないが、おそらく誰も追従してくれないだろう。

そもそもモデル圏 (model category) という用語も疑問である。私は詳しくないのだが、モデル理論などに関係があるのだろうか？ホモトピー型理論などとは関係が深いようだが。

1.2.2 余束生成モデル圏

モデル圏の公理を満たす圏は多数知られている。しかし、それらが確かにモデル圏であることを確かめるのは容易ではない。そこで、モデル圏となるための便利な十分条件が知られている。より精密に言えば、余束生成モデル圏と呼ばれる特殊なモデル圏は、より簡単に確かめられる必要十分条件が知られている。これを説明するために、いくつか用語の準備をする。

定義 1.2.4 (射の超限合成). 余完備な圏 \mathcal{C} 上で考える。

整列集合 Λ に対し、 Λ -合成可能組[†]とは、関手 $\Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ のことである。

Λ -合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ の超限合成 (*transfinite composition*) とは、自然な射 $X_0 \rightarrow \text{colim} X$ のことである。ただし、 $0 = \min(\Lambda)$ である。

定義 1.2.5 (相対セル複体). 余完備な圏 \mathcal{C} 上で考える。

$I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。射 $A \rightarrow B$ が I -相対セル複体とは、整列集合 Λ および Λ -合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ が存在し、次を満たすことである。

- $A \rightarrow B$ は X の超限合成に一致する。
- 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、 $X_\lambda \rightarrow X_{\lambda+1}$ はある $i \in I$ の押し出しである。つまり、次のような押し出し図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longrightarrow & X_{\lambda+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \cdot & \xrightarrow{i} & \cdot \end{array}$$

ただし、 $\lambda + 1 = \min(\{\lambda' \in \Lambda \mid \lambda' > \lambda\})$ である。

例 1.2.6. \mathcal{C} が位相空間の圏 **Top** で、 I を $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ の集まりとしたとき、 I -相対セル複体とは通常の意味での相対セル複体である。特に、始域が空集合である相対セル複体は通常の意味でのセル複体である。

注意 1.2.7. CW 複体の文脈で“セル複体”といった場合、 n -セルの境界が $(n-1)$ -スケルトンに含まれることを要請するかもしれない。しかし、上で定義した意味でのセル複体はこの性質を満たすとは限らない。一方、上で定義した意味でのセル複体は性質 C および性質 W を満たす。その意味で、これは CW 複体の一般化になっている。

まずは余束生成モデル圏の定義を述べる。ただし、未定義語が一つだけあるので注意する。

定義 1.2.8 (余束生成モデル圏). モデル圏 \mathcal{C} が余束生成 (*cofibrantly generated*) であるとは、射の (小さい) 集合 $I, J \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ が存在し、次を満たすことである。

- f が余束であることは、 f がある I -相対セル複体のレトラクトであることと同値である。
- f が非輪状余束であることは、 f がある J -相対セル複体のレトラクトであることと同値である。
- I および J は“小対象引数を許容する”。

三つ目の条件が未定義であるが、これは難しいので後回しにする。

この条件は、もう少し簡単にできる。そのため、もう一つだけ記号を用意しておこう。

定義 1.2.9 (記号の準備). 余完備な圏 \mathcal{C} 上で考える。

$I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。このとき、任意の $i \in I$ に対して左リフト性質を持つ射全体のクラスを $\text{llp}(I)$ と表し、任意の $i \in I$ に対して右リフト性質を持つ射全体のクラスを $\text{rlp}(I)$ と表す。

定理 1.2.10 (余束生成の特徴づけ). \mathcal{C} は余束生成モデル圏とし、 I, J は定義 1.2.8 のものとする。このとき、 \mathcal{C} の余束全体の集合は $\text{llp}(\text{rlp}(I))$ に一致し、 \mathcal{C} の非輪状余束全体の集合は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に一致する。

これを証明するためには、もう少し準備が必要である。

1.2.3 相対セル複体の基本性質

まず、リフト性質について閉じる基本操作についてまとめる。

補題 1.2.11. 余完備な圏 \mathcal{C} 上で考える。

$I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。

1. $f \in \text{llp}(I)$ ならば、 f の押し出しも $\text{llp}(I)$ に含まれる。すなわち、次の図式が押し出しならば、 $g \in \text{llp}(I)$ である。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{g} & \cdot \\ \uparrow & & \uparrow \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \end{array}$$

2. Λ が整列集合で、 X が Λ -合成可能組であるとする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \rightarrow X_{\lambda+1}$ が $\text{llp}(I)$ に含まれるならば、 X の超限合成も $\text{llp}(I)$ に含まれる。
3. $f \in \text{llp}(I)$ ならば、 f のレトラクトも $\text{llp}(I)$ に含まれる。すなわち、次の図式が可換ならば、 $g \in \text{llp}(I)$ である。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

これより、相対セル複体について直ちに次がわかる。

命題 1.2.12. 余完備な圏 \mathcal{C} 上で考える。

$I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。射 f がある I -相対セル複体のレトラクトならば、 $f \in \text{llp}(\text{rlp}(I))$ である。

また、相対セル複体の合成も相対セル複体である。

補題 1.2.13. Λ -合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ について、各 $X_\lambda \rightarrow X_{\lambda+1}$ が I -相対セル複体ならば、その超限合成 $X_0 \rightarrow \text{colim} X$ も I -相対セル複体である。

さらに、 \emptyset -合成可能組の合成を考えることで、任意の恒等射は相対セル複体である。よって、次が成り立つ。

命題 1.2.14. I -相対セル複体全体のクラスは部分圏をなす。

この I -相対セル複体全体からなる部分圏を $\text{cell}(I)$ と書く。

1.2.4 小対象引数と射の分解

射を I -相対セル複体と $\mathrm{rlp}(I)$ の合成に分解する方法を与えたい。そのために、小対象引数という概念を導入する。

定義 1.2.15 (相対的に小). \mathcal{C} を圏とし、 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ は部分圏とする。 κ を基数とする。 \mathcal{C} の対象 x が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小であるとは、 $\Lambda \geq \kappa$ なる任意の正則基数 Λ および任意の Λ -合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow \mathcal{D}$ に対して、次の写像が全単射になることである。

$$\mathrm{colim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, X_{\lambda}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \mathrm{colim} X_{\lambda})$$

x が \mathcal{D} に対して相対的に小であるとは、ある基数 κ について x が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小であることである。

x が (単に) κ -小であるとは、 x が \mathcal{C} に対して相対的に κ -小であることである。

x が小であるとは、 x が \mathcal{C} に対して相対的に小であることである。

例 1.2.16. \mathcal{C} が集合と写像の圏 **Set** の時、任意の有限集合は \aleph_0 -小である。(可算無限濃度 \aleph_0 は最小の正則基数であることに注意。)

例 1.2.17. \mathcal{U} は小さい圏とし、 \mathcal{C} は \mathcal{U} 上の前層の圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}^{op}}$ とする。この時、 \mathcal{U} の任意の対象 U に対し、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, U)$ は \aleph_0 -小である。

定義 1.2.18 (相対的に小 (セル複体)). $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。対象 x が I に対して相対的に κ -小であるとは、 x が部分圏 $\mathrm{cell}(I)$ に対して相対的に κ -小であることである。

対象 x が I に対して相対的に小であるとは、ある基数 κ について対象 x が I に対して相対的に κ -小であることである。

例 1.2.19 ([4]). \mathcal{C} は位相空間と連続写像の圏 **Top** とし、 I は $\partial \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ の集まりとする。 $\mathrm{cell}(I)$ は (通常の意味での) 相対セル複体の圏である。この時、任意のコンパクト集合は I に対して相対的に \aleph_0 -小である

定義 1.2.20 (小対象引数). $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ はある射の集合とする。 I が小対象引数を許容するとは、任意の $i \in I$ の始域が I に対して相対的に小であることである。

命題 1.2.21. \mathcal{C} は余完備な圏で $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ は小対象引数を許容する射の集合とする。この時、 \mathcal{C} の任意の射 $f : x \rightarrow y$ は $f = p_f \circ i_f$ なる関手的な分解で、 $p_f \in \mathrm{rlp}(I)$ かつ i_f が I -相対セル複体となるものが存在する。

証明. I が小対象引数を許容するので、任意の $i \in I$ に対し、ある基数 κ について i の始域が I に対して相対的に κ -小である。 I は集合だから、十分大きい基数 κ をとれば、任意の $i \in I$ の始域が I に対して相対的に κ -小であるとしてよい。

これから、次のような κ -合成可能組 $E : \kappa \rightarrow \text{cell}(I)$ および錐 $p : E \rightarrow y$ を帰納的に構成する。

$$\begin{array}{ccccccc} x = E_0 & \xrightarrow{i_0} & E_1 & \xrightarrow{i_1} & E_2 & \xrightarrow{i_2} & \dots \\ & \searrow f=p_0 & \downarrow p_1 & & \swarrow p_2 & & \\ & & & & & & y \end{array}$$

ただし、各 i_k が I の元の余積の押し出しになっているように構成する。

まず、 $E_0 = x$, $f = p_0$ である。

次に、 k 切片 $\kappa(k)$ まで構成できたとする。すなわち、 $\kappa(k)$ -合成可能組 $E' : \kappa(k) \rightarrow \text{cell}(I)$ および錐 $p' : E' \rightarrow y$ が構成できていたとする。 $E'_k = \text{colim} E'$ とし、 p' が導く射 $E'_k \rightarrow y$ を p'_k とする。各 $(i : a_i \rightarrow b_i) \in I$ に対して、 $H_i = \text{Hom}(a_i, E'_k) \times_{\text{Hom}(a_i, y)} \text{Hom}(b_i, y)$ と置く。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & & p'_k \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ E'_k & \xrightarrow{\quad} & E_k \xrightarrow{\quad} y \\ \uparrow \amalg u & & \uparrow \\ \amalg_{\substack{(i:a_i \rightarrow b_i) \in I \\ (u,v) \in H_i}} a_i & \xrightarrow{\amalg i} & \amalg_{\substack{(i:a_i \rightarrow b_i) \in I \\ (u,v) \in H_i}} b_i \\ & & \swarrow \amalg v \end{array}$$

ここで、 E_k は図式左下の四角が押し出しになるように定める。

こうして $E : \kappa \rightarrow \text{cell}(I)$ および錐 $p : E \rightarrow y$ が構成された。そこで、 $x \rightarrow \text{colim} E$ を i_f とし、 p が導く $\text{colim} E \rightarrow y$ を p_f とすると、 $f = p_f \circ i_f$ とできる。構成から i_f は条件を満たす。また明らかに関手的である。あとは $p_f \in \text{rlp}(I)$ を示せばよい。

任意の $(i : a_i \rightarrow b_i) \in I$ に対し、次の形の図式を考える。

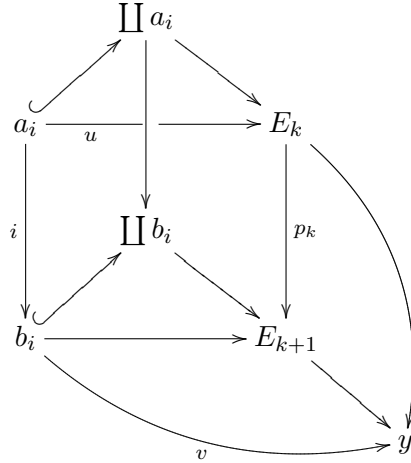
$$\begin{array}{ccc} a_i & \longrightarrow & \text{colim} E \\ i \downarrow & & \downarrow p_f \\ b_i & \longrightarrow & y \end{array}$$

a_i は I に対して相対的に κ -小だから、次の写像は全単射である。

$$\text{colim} \text{Hom}(a_i, E_k) \rightarrow \text{Hom}(a_i, \text{colim} E)$$

よって、 $a_i \rightarrow \text{colim} E$ はある $u : a_i \rightarrow E_k$ に持ち上がる。ここで、 $E_k \cong E'_{k+1}$ に注意す

る。次の可換図式が存在する。



これはすなわち、 i のリフトが存在することを意味する。よって、 $p_f \in \text{rlp}(I)$ である。□

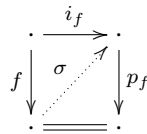
1.2.5 定理 1.2.10 の証明

ようやく定理 1.2.10 が証明できる。といっても、ここまで十分に準備しているの、あとは簡単である。

証明. I と J は全く同様なので、 I についてのみ証明する。

f を \mathcal{C} の余束とする。余束生成モデル圏の定義より、 f はある I -相対セル複体のレトラクトである。命題 1.2.12 より、 $f \in \text{llp}(\text{rlp}(I))$ である。

逆に、 $f \in \text{llp}(\text{rlp}(I))$ であったとする。 I は小対象引数を許容するので、命題??より、 $f = p_f \circ i_f$ なる分解で、 $p_f \in \text{rlp}(I)$ かつ i_f が I -相対セル複体となるものが存在する。次の図式を考える。



$f \in \text{llp}(\text{rlp}(I))$ と $p_f \in \text{rlp}(I)$ より、図式を可換にする σ が存在する。これは、 f が i_f のレトラクトであることを意味する。すなわち、 f はある I -相対セル複体のレトラクトである。余束生成モデル圏の定義より、 f は余束である。□

1.2.6 モデル構造の生成

これまで、余束生成モデル圏の構造が I と J によって支配されていることを見た。逆に、 I と J の条件から余束生成モデル圏の構造を復元できないかと考える。実際、次の条件が与えられている。

定理 1.2.22 (認識定理 (Recognition Theorem)). 圏 \mathcal{C} が完備かつ余完備であって、次を満たす射のクラス $W \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ および二つの射の (小さい) 集合 $I, J \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ が存在したとする。(ただし、 $\text{Cof}(I) = \{I\text{-相対セル複体のレトラクト}\}$ とし、 $\text{Cof}(J)$ も同様とする。)

- $\text{Cof}(J) \subset W \cap \text{Cof}(I)$ である。
- $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である。
- 上記二つの条件のうち、一方の逆が成り立つ。すなわち、次のいずれかが成り立つ。
 - $\text{Cof}(J) = W \cap \text{Cof}(I)$ である。
 - $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ である。
- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。
- I および J は小対象引数を許容する。

このとき、 W を弱同値、 I と J を定義 1.2.8 のものとして、 \mathcal{C} は余束生成モデル圏の構造を持つ。

証明.

$$\begin{aligned} \text{Fib} &= \text{rlp}(J) \\ \text{Cof} &= \text{Cof}(I) \end{aligned}$$

とする。 $W, \text{Fib}, \text{Cof}$ がモデル圏の構造を満たすことを示せばよい。公理を順番に確かめる。

- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。

は仮定より満たされている。

- g が f のレトラクトであったとする。このとき、もし $f \in W$ (resp. $f \in \text{Fib}$, or $f \in \text{Cof}$) ならば $g \in W$ (resp. $g \in \text{Fib}$, or $g \in \text{Cof}$) である。

$f \in \text{Cof}$ ならば $g \in \text{Cof}$ であるのは、 Cof の定義から当たり前である。補題 1.2.11 の双対より、 $f \in \text{Fib}$ ならば $g \in \text{Fib}$ である。残りの、 $f \in W$ ならば $g \in W$ であることを示す。

命題 1.2.21 より、 $f = p_f \circ i_f$ および $g = p_g \circ i_g$ なる分解で、 $p_f, p_g \in \text{rlp}(I)$ かつ $i_f, i_g \in \text{Cof}(I)$ となるものが存在する。さらにこの分解は関手的なので、 p_g は p_f のレトラクトであり、 i_g は i_f のレトラクトである。補題 1.2.11 の双対より、 $p_g \in \text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である。また、 $f, p_f \in W$ より、 $i_f \in W$ である。もし、 $\text{Cof}(J) = W \cap \text{Cof}(I)$ であるならば、 $i_f \in \text{Cof}(J)$ である。よって $i_g \in \text{Cof}(J) = W \cap \text{Cof}(I)$ である。 $i_g, p_g \in W$ だから、 $g \in W$ である。

$\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ の場合は、 f と g の分解を $p_f, p_g \in \text{rlp}(J)$ かつ $i_f, i_g \in \text{Cof}(J)$ でとればよい。

- $W \cap \text{Cof} \subset \text{llp}(\text{Fib})$ である。また、 $\text{Cof} \subset \text{llp}(W \cap \text{Fib})$ である。

$W \cap \text{Cof} \subset \text{llp}(\text{Fib})$ を示すため、任意の $f \in W \cap \text{Cof}$ をとる。

もし、 $\text{Cof}(J) = W \cap \text{Cof}(I)$ ならば、 $f \in \text{Cof}(J)$ である。よって命題 1.2.12 より $f \in \text{llp}(\text{Fib})$ である。

一方、 $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ であったとする。命題 1.2.21 より、 $f = p_f \circ i_f$ なる分解で、 $p_f \in \text{rlp}(J)$ かつ $i_f \in \text{Cof}(J)$ となるものが存在する。 $f, i_f \in W$ より、 $p_f \in W$ である。よって、 $p_f \in \text{rlp}(J) \cap W = \text{rlp}(I)$ である。命題 1.2.12 より、次の図式は斜めのリフトを持つ。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{i_f} & \cdot \\ f \downarrow & \nearrow & \downarrow p_f \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

よって f は $i_f \in \text{Cof}(J)$ のレトラクトであるので、 $f \in \text{Cof}(J)$ である。命題 1.2.12 より $f \in \text{llp}(\text{Fib})$ である。

$\text{Cof} \subset \text{llp}(W \cap \text{Fib})$ についても同様に示せる。

- 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f = p'_f \circ i'_f$ なる二つの関手的な分解で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in W \cap \text{Cof}$, $p'_f \in W \cap \text{Fib}$, $i'_f \in \text{Cof}$ となるものが存在する。

命題 1.2.21 より明らか。 □

1.2.7 モデル構造の推移

余束生成モデル圏の構造は、簡単な仮定の下で、随伴関手によって推移する。

定理 1.2.23. 圏 \mathcal{C} は余束生成モデル圏であって、 I が余束を、 J が非輪状余束を生成していたとする。また、弱同値の射のクラスを $W_{\mathcal{C}}$ と表す。随伴関手 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、 \mathcal{D} 上の射のクラスを次のように定める。

$$\begin{aligned} FI &= \{F(i) \mid i \in I\} \\ FJ &= \{F(j) \mid j \in J\} \\ W_G &= \{f \mid G(f) \in W_{\mathcal{C}}\} \end{aligned}$$

さらに、次を仮定する。

- $\text{cell}(FJ) \subset W_G$ である。
- FI および FJ は小対象引数を許容する。

このとき、 \mathcal{G} 上の余束生成モデル圏構造であって、 FI が余束を、 FJ が非輪状余束を生成し、 W_G を弱同値の射のクラスとするものが存在する。

証明. 次のことを示せばよい。

- $\text{Cof}(FJ) \subset W_G \cap \text{Cof}(FI)$ である。
- $\text{rlp}(FI) = \text{rlp}(FJ) \cap W_G$ である。
- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W_G に含まれるなら、残りの一つも W_G に含まれる。
- FI および FJ は小対象引数を許容する。

順番に確かめる。

- $\text{Cof}(FJ) \subset W_G \cap \text{Cof}(FI)$ である。

$\text{Cof}(FJ) \subset W_G$ は問題の仮定に含まれている。また、 $J \subset \text{Cof}(I)$ より $FJ \subset F(\text{Cof}(I))$ である。 F は余極限とレトラクトを保つので、 $F(\text{Cof}(I)) \subset \text{Cof}(FI)$ である。よって、 $\text{Cof}(FJ) \subset \text{Cof}(FI)$ である。

- $\text{rlp}(FI) = \text{rlp}(FJ) \cap W_G$ である。

随伴の普遍性により、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} f \in \text{rlp}(FI) &\Leftrightarrow G(f) \in \text{rlp}(I) \\ &\Leftrightarrow G(f) \in \text{rlp}(J) \cap W_G \\ &\Leftrightarrow f \in \text{rlp}(FJ) \cap W_G \end{aligned}$$

よって、 $\text{rlp}(FI) = \text{rlp}(FJ) \cap W_G$ である。

- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W_G に含まれるなら、残りの一つも W_G に含まれる。

これは W_G の定義より明らか。

- FI および FJ は小対象引数を許容する。

これは問題の仮定に含まれている。

□

第2章 単体的集合

2.1 単体的集合

本章は主に [3] と nLab[1] を参考にしている。

2.1.1 単体的集合

定義 2.1.1 (単体圏). 単体圏とは、次のように定義される圏 Δ のことである。

- Δ の対象は有限順序数 $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ である。
- Δ の射は順序を保つ写像である。

圏 Δ には生成元と基本関係式による具体的な表示が与えられている。

$\delta_i^n : n \rightarrow n+1$ ($0 \leq i \leq n$) および $\sigma_i^n : n+1 \rightarrow n$ ($0 \leq i \leq n-1$) を

$$\delta_i^n(k) = \begin{cases} k & (k < i) \\ k+1 & (k \geq i) \end{cases} \quad \sigma_i^n(k) = \begin{cases} k & (k \leq i) \\ k-1 & (k > i) \end{cases}$$

によって定める。右上の添え字はしばしば省略する。

補題 2.1.2. 圏 Δ は δ_i および σ_i たちによって生成され、基本関係式は次の等式で表される。

$$\begin{aligned} \delta_i \circ \delta_j &= \delta_{j+1} \circ \delta_i & (i \leq j) \\ \sigma_j \circ \sigma_i &= \sigma_i \circ \sigma_{j+1} & (i \leq j) \\ \sigma_j \circ \delta_i &= \begin{cases} \delta_i \circ \sigma_{j-1} & (i < j) \\ id & (i = j, \text{ or } j+1) \\ \delta_{i-1} \circ \sigma_j & (i > j+1) \end{cases} \end{aligned}$$

これにより、圏 Δ の表現 (すなわち、圏 Δ から延びる関手) を計算することができる。

定義 2.1.3 (単体的対象). 単体圏 Δ の対象を正の順序数に制限した充満部分圏を Δ^+ と表す。

C は圏とする。 C 上の単体的対象 (simplicial object) とは、 C に値を持つ Δ^+ 上の前層 (すなわち関手 $(\Delta^+)^{op} \rightarrow C$) のことである。

C 上の添加単体的対象 (augmented simplicial object) とは、 C に値を持つ Δ 上の前層のことである。

単体的対象または添加単体的対象 X に対し、 $X(n)$ を X_{n-1} と書く。これらの間の射とは、自然変換のことである。

注意 2.1.4. C が終対象 $*$ を持ち、単体的対象 X があった場合、 $X_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} *$ とすることで X を添加単体的対象へと拡張できる。後で見るように、添加単体的対象と単体的対象は、概念としてはほぼ同等である。よって、用語としてはしばしばこれらを区別せず、主に添加単体的対象を単体的対象と呼ぶ。

例 2.1.5 (単体的集合). C が集合と写像の圏 \mathbf{Set} のとき、 \mathbf{Set} 上の単体的対象のことを単体的集合 (simplicial set) と呼ぶ。単体的集合の圏を \mathbf{SSet} と書く。

具体的には、次のようなデータで表すこともできる。すなわち、単体的集合とは自然数 n で添え字付けられた集合 X_n および、それらの間の写像 $d_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1} (0 \leq i \leq n)$ および $s_i^n : X_{n-1} \rightarrow X_n (0 \leq i \leq n-1)$ 達の組 $X = \{X_n, d_i^n, s_i^n\}$ であり、次の関係式を満たすものである。

$$\begin{aligned} d_j \circ d_i &= d_i \circ d_{j+1} & (i \leq j) \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i & (i \leq j) \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & (i < j) \\ id & (i = j, \text{ or } j + 1) \\ s_j \circ d_{i-1} & (i > j + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、各 $x \in X_n$ は n 次元単体に対応し、 d_i^n は単体の “ i 番目の頂点を忘れる” 写像であり、 s_i^n は “ i 番目の頂点を重ねる” 写像である。

例 2.1.6 (単体的空間). C が位相空間と連続写像の圏 \mathbf{Top} のとき、 \mathbf{Top} 上の単体的対象のことを単体的空間 (simplicial space) と呼ぶ。単体的空間の圏を \mathbf{STop} と書く。集合を離散空間と見なすことで、単体的集合は単体的空間と見なせる。

単体圏は幾何学的解釈を持つ。その名の通り、単体達がそれを与える。

Δ^{-1} を空集合、 Δ^n を標準的な向き付きの n 次元単体とする。頂点集合の間の順序を保つ写像を線形に拡張することにより、 $n \mapsto \Delta^{n-1}$ は関手 $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ を与える。誤解のない場合、この関手も Δ と表す。ここで、各 δ_i^n は単体の “ i 番目の面に埋め込む” 写像であり、 σ_i^n は “ i 番目の面につぶす” 写像である。

任意の位相空間に対し、標準的な単体的集合が対応する。

例 2.1.7. 各位相空間 X に対し、単体的集合 $Sing(X) \stackrel{\text{def}}{=} Hom(\Delta-, X)$ が定まる。これを X の特異単体的集合 (singular simplicial set) と呼ぶ。 $X \mapsto Sing(X)$ は関手的である。

また、次の自明な例はある意味で単体を表す。

例 2.1.8 (単体). 単体圏 Δ の各対象 n に対し、 $Hom(-, n)$ は単体的集合である。これを $n-1$ 次元単体と呼ぶ。誤解のない場合、これを Δ^{n-1} で表す。

2.1.2 幾何学的実現

任意の単体的集合は CW 複体として実現することができる。\$X\$ は単体的空間とする。関手 \$S_X : (\Delta^+)^{op} \times \Delta^+ \to \mathbf{Top}\$ を、\$S_X(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} X_{n-1} \times \Delta^{m-1}\$ によって定める。

定義 2.1.9 (単体的対象). 単体的空間 \$X\$ の幾何学的実現 (geometric realization) とは、\$S_X\$ のコエンド \$\int^n S_X(n, n)\$ のことである。これを \$|X|\$ と書く。

添加単体的空間 \$X\$ についても同様に、幾何学的実現を定義することができる。この時、\$\Delta^{-1}\$ が空集合であることから、\$X_{-1}\$ は本質的に機能しない。よって、単体的空間と添加単体的空間は、数学的には区別されるものの、概念としてはほぼ同等である。単体的空間 \$X\$ の幾何学的実現は、具体的に次で与えられる。

命題 2.1.10.

$$|X| \cong \left(\coprod_n X_{n-1} \times \Delta^{n-1} \right) / \sim$$

ただし、\$\sim\$ は次の二項関係 \$\stackrel{p}{\sim}\$ が生成する同値関係である。

$$(x, p) \stackrel{p}{\sim} (y, q) \Leftrightarrow \begin{cases} d_i(x) = y, \sigma_i(q) = p \\ \text{または} \\ s_i(x) = y, \delta_i(q) = p \end{cases}$$

単体的集合の幾何学的実現は左 Kan 拡張だと思える。次の図式を考えよう。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SSet} & & \\ \uparrow y & \searrow \mathbb{L}_y \Delta & \\ \Delta & \xrightarrow[\Delta]{} & \mathbf{Top} \\ & \nearrow \eta \uparrow & \end{array}$$

ここで、\$y : \Delta \to \mathbf{SSet}; n \mapsto \Delta^{n-1}\$ は米田埋め込みである。この時、米田の補題より、\$X_{n-1} \cong \text{Hom}_{\mathbf{SSet}}(\Delta^{n-1}, X)\$ である。すなわち、関手 \$S_X\$ は次のように表せる。

$$S_X(n, m) = X_{n-1} \times \Delta^{m-1} \cong \coprod_{\text{Hom}_{\mathbf{SSet}}(\Delta^{n-1}, X)} \Delta^{m-1}$$

このコエンドは、\$\Delta\$ の \$y\$ に沿った左 Kan 拡張のコエンドによる表現そのものである。

一方、例 1.1.17 より、\$\mathbf{Top} \to \mathbf{SSet}; X \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta(-), X)\$ は \$y\$ の \$\Delta\$ に沿った左 Kan 拡張である。これは、各位相空間に特異単体的集合 \$Sing(X)\$ を対応させる関手である。

命題??より直ちに次が従う。

命題 2.1.11. \$|-| \dashv Sing\$

この時、単位射 $\epsilon : |Sing| \rightarrow Id$ は具体的に次のように書ける。 $\tilde{\epsilon}^n : Sing(X)_n \times \Delta^n \rightarrow X$ を

$$\tilde{\epsilon}^n(s, p) = s(p)$$

によって定める。 $d_i(s) = t, \sigma_i(q) = p$ の時、

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}^n(s, p) &= s(p) \\ &= (s \circ \sigma_i)(q) \\ &= (d_i(s))(q) \\ &= t(q) \\ &= \tilde{\epsilon}^{n-1}(t, q) \end{aligned}$$

同様に $s_i(s) = t, \delta_i(q) = p$ のとき $\tilde{\epsilon}^n(s, p) = \tilde{\epsilon}^{n+1}(t, q)$ である。よって $\tilde{\epsilon}^n$ 達は連続写像 $\epsilon_X : |Sing(X)| \rightarrow X$ を定める。

これが普遍性を満たすことも見てみよう。

任意の単体的集合 Z および連続写像 $f : |Z| \rightarrow X$ をとる。上記の図式を可換とする \hat{f} が存在したと仮定する。この時、次の図式が可換でなければならない。

$$\begin{array}{ccc} Z_n \times \Delta^n & \xrightarrow{\hat{f}_n \times id} & Sing(X)_n \times \Delta^n \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \\ |Z| & \xrightarrow{|\hat{f}|} & |Sing(X)| \\ & \searrow f & \downarrow \epsilon_X \\ & & X \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a curved arrow from $Sing(X)_n \times \Delta^n$ to X labeled $\tilde{\epsilon}^n$ and a curved arrow from $|Z|$ to X labeled f .)

これは、任意の $(z, p) \in Z_n \times \Delta^n$ に対して $(\hat{f}_n(z))(p) = \tilde{\epsilon}^n(\hat{f}_n(z), p) = f(\pi_n(z, p))$ でなければならないことを意味する。これは Z と f のみに依存するので、 \hat{f} は一意である。逆に、上記の式で \hat{f} を定めれば、これは確かに単体的集合の射である。

さらに、上記の対応はある意味でホモトピー群の構造を保つことが知られている。具体的には、**Top** と **SSet** の上にはそれぞれモデル圏の構造が入り、これらが導くホモトピー圏が同値となるのである。

この対応は、ホモトピー群（弱ホモトピー同値）の情報を **SSet** 上で計算するための対応であるが、ホモトピー（ホモトピー同値）の情報は **SSet** 上では計算することができない。ホモトピーの情報を失わないためには、 $Sing(X)$ にコンパクト開位相を入れ、**STop** との対応を見る必要がある。

2.1.3 単体圏の性質

単体圏 Δ 上のコエンドを計算することが多い。そこで、次の性質を確かめておく。

命題 2.1.12. 余ねじれ射圏 $\Delta^\#$ は余フィルター圏である。すなわち、次の性質を満たす。

- Δ 上の任意の射 $f: n \rightarrow m, g: n' \rightarrow m'$ に対し、ある射 $h: n'' \rightarrow m''$ および次の可換図式が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} n & \longrightarrow & n'' & \longleftarrow & n' \\ f \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow g \\ m & \longleftarrow & m'' & \longrightarrow & m' \end{array}$$

- Δ 上の任意の射 $f: n \rightarrow m, g: n' \rightarrow m'$ および、次の可換図式をとる。

$$\begin{array}{ccccc} n & \longrightarrow & n' & \longleftarrow & n \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ m & \longleftarrow & m' & \longrightarrow & m \end{array}$$

このとき、ある Δ 上の射 $h: n'' \rightarrow m''$ および次の図式が存在して、左の四角が可換となり、上下それぞれの平行二射が一致する。

$$\begin{array}{ccccc} n'' & \longrightarrow & n & \xrightarrow{\cong} & n' \\ h \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ m'' & \longleftarrow & m & \xrightarrow{\cong} & m' \end{array}$$

証明. 一つ目の条件は、 $h = f + g: n + n' \rightarrow m + m'$ を取ればよい。二つ目の条件は、 $h: 0 \rightarrow 1$ なる唯一つの射を取ればよい。□

系 2.1.13. 集合に値を持つ単体圏上の任意の双関手 $\Delta^{op} \times \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$ のコエンドは有限極限と交換する。

証明. $\Delta^{op} \times \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$ のコエンドはフィルター余極限として書ける。 \mathbf{Set} 上ではフィルター余極限は有限極限と交換するので、コエンドは有限極限と交換する。□

上記の命題は、 \mathbf{Set} の代わりにフィルター余極限は有限極限が交換する任意の圏としても成り立つ。例えば、前層の圏などでも成り立つ。

2.1.4 Top 上のホモトピー論

単体的集合の圏 \mathbf{SSet} 上のホモトピー論の説明の前に、位相空間の圏 \mathbf{Top} 上のホモトピー論をおさらいしよう。

$S^{n-1} \rightarrow D^n$ の集まりを I とし、 $D^n \times \{0\} \rightarrow D^n \times I$ の集まりを J とする。実は、 I が余束を、 J が非輪状余束を生成し、 \mathbf{Top} 上には余束生成モデル圏の構造が入る。(今は証明しない。) \mathbf{Top} 上のモデル圏の構造を定める弱同値とは弱ホモトピー同値のことである。

定義 2.1.14. $f : X \rightarrow Y$ が弱ホモトピー同値であるとは、 $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ が全単射であり、任意の基点 $x \in X$ および任意の正整数 n に対し、ホモトピー群の間の写像 $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ が同型になることである。

以下の条件は実は必要十分だが、便利のため十分性のみ先に示しておく。

補題 2.1.15. 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすならば、 f は弱ホモトピー同値である。

次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする。ただし、 $S^{-1} = \emptyset$ とする。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \exists \gamma \nearrow & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

次の性質により、**Top** 上のホモトピー論はある意味で **SSet** 上のホモトピー論に帰着させることができる。

命題 2.1.16. 任意の位相空間 X に対し、 $\epsilon_X : |\text{Sing}(X)| \rightarrow X$ は弱ホモトピー同値である。

証明. 次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & |\text{Sing}(X)| \\ \downarrow & \exists \gamma \nearrow & \downarrow \epsilon_X \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

$D^n \cong \Delta^n$ で置き換えれば、 $\beta \in \text{Sing}(X)_n$ より、次の持ち上げが存在する。

$$\begin{array}{ccc} \text{Sing}(X)_n \times \Delta^n & \longrightarrow & |\text{Sing}(X)| \\ \uparrow & \exists \gamma \nearrow & \downarrow \epsilon_X \\ D^n \cong \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

境界上の各単体への制限は、 $S^{n-1} \cong \partial \Delta^n$ の各単体への制限に一致する。すなわち γ の S^{n-1} への制限は α に一致する。よって、 γ は図式の上下の三角を可換にする。 \square

注意 2.1.17. 上記の証明で、図式の下三角を（高々ホモトピックと言わず）厳密に可換にすることができた。実はこれは、 ϵ_X が非輪状束であることを意味している。

Serre 束

また、**Top** 上のモデル圏構造の束にあたるものは次の定義である。

定義 2.1.18. 各 $f \in \text{rlp}(J)$ を *Serre 束 (Serre fibration)* または *Serre ファイブレーション* と呼ぶ。具体的には次のように定義できる。

$f : X \rightarrow Y$ が *Serre 束* であるとは、任意の n 次元円盤 D^n と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、 $I = [0, 1]$ は単位閉区間とする。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

例 2.1.19. ファイバー束は Serre 束である。

Serre 束の最も重要な性質はホモトピー長完全列であろうが、ここではあえて触れずに、次のことだけ証明する。

補題 2.1.20. $f : X \rightarrow Y$ を *Serre 束* とする。任意の点 $y \in Y$ に対し $F_y = f^{-1}(y)$ が弱可縮（すなわち、一点集合への唯一の写像が弱ホモトピー同値）ならば、 f は弱ホモトピー同値である。

証明. Y が弱可縮の場合

X が弱可縮であることを示せばよい。すなわち、任意の連続写像 $s : S^n \rightarrow X$ が一点とホモトピックであることを示せばよい。 Y が弱可縮であることより、 $f \circ s : S^n \rightarrow Y$ は一点 $y \in Y$ とホモトピックである。このホモトピーを $H : S^n \times I \rightarrow Y$ と置く。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} S^n \times \{0\} & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow f \\ S^n \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

$S^n \times \{0\} \rightarrow S^n \times I$ は $\text{cell}(J)$ に含まれるので、上記の図式を可換にする連続写像 \tilde{H} が存在する。このとき、 F_y が弱可縮であることから、 $\tilde{H}_1 : S^n \rightarrow F_y$ は一点とホモトピックである。 f は \tilde{H}_1 とホモトピックで、 \tilde{H}_1 は一点とホモトピックだから、 f は一点とホモトピックである。

一般の場合

次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha_*} & D^n \times_Y X \\
 \downarrow & \nearrow \exists \gamma' & \downarrow pr_1 \\
 D^n & \xlongequal{\quad} & D^n
 \end{array}$$

Serre 束の引き戻しは Serre 束なので、 pr_1 は Serre 束である。また、この各ファイバーおよび底空間 D^n は弱可縮であるので、 $D^n \times_Y X$ も弱可縮である。よって、上記図式の上三角を可換にする γ' が存在する。下三角は Alexander の手品によりホモトピックである。 $\gamma = pr_2 \circ \gamma' : D^n \rightarrow X$ が求めるものである。□

相対セル複体

Top 上の相対セル複体の性質についてまとめる。まず、各 $D^n \times \{0\} \rightarrow D^n \times I$ は次のように分解できるため、これは $cell(I)$ に含まれる。

$$\begin{array}{ccccc}
 D^n \times \{0\} & \longrightarrow & \partial(D^n \times I) & \longrightarrow & D^n \times I \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 S^{n-1} & \longrightarrow & D^n & &
 \end{array}$$

よって $cell(J) \subset cell(I)$ であるので、 $Cof(J) \subset Cof(I)$ である。

$cell(I)$ に関して次の性質は便利である。([4] を参照。)

命題 2.1.21. 任意の $f \in cell(I)$ は閉埋め込みである。

命題 2.1.22. $(f : A \rightarrow B) \in cell(I)$ が超限合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow cell(I)$ の超限合成として得られていたとする。この時、任意のコンパクト部分集合 $K \subset B$ に対し、有限序数 $n \in \Lambda$ と K の持ち上げ $K \rightarrow X_n$ が存在する。

実は、 I が余束を、 J が非輪状余束を生成するのだが、ひとまず次を示す。

補題 2.1.23. 各 $f \in cell(J)$ は弱ホモトピー同値である。

証明. 次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & B
 \end{array}$$

f が J の押し出しの超限合成可能組 $X : \Lambda \rightarrow \mathbf{Top}$ の超限合成として得られていたとする。この時、有限序数 $n \in \Lambda$ と次の持ち上げ γ_n が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_n \\
 & \nearrow \exists \gamma_n & \downarrow \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & B
 \end{array}$$

$X_n \rightarrow B$ は $cell(I)$ に含まれるので、特に単射である。よって、次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\gamma^n} & X_n \end{array}$$

$A \rightarrow X_n$ はホモトピー同値の有限合成なので、これもホモトピー同値である。よって斜めに横断する持ち上げ γ' で上下の三角を高々ホモトピックで可換にするものが存在する。 γ' を変形すれば、目的の γ が得られる。□

2.1.5 単体的ホモトピー

単体的集合の射がホモトピックであるとは、次のように定義する。

定義 2.1.24 (ホモトピー). 二つの単体的集合の射 $f, g: X \rightarrow Y$ に対し、 f から g へのホモトピーとは、射 $H: X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ であって、次の可換図式を満たすものことである。

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & Y \\ \delta_0 \amalg \delta_1 \uparrow & \nearrow f \amalg g & \\ X \amalg X & & \end{array}$$

f から g へのホモトピーまたは g から f へのホモトピーが存在するとき、 f と g はホモトピックであるという。

注意 2.1.25. この意味でのホモトピックの関係は、一般には同値関係にならない。

今、米田埋め込み $\Delta \rightarrow \mathbf{SSet}$ は稠密であるので、任意の単体的集合 X はコエンドを用いて次のように書ける。

$$X \cong \int^n \coprod_{X_{n-1}} \Delta^{n-1}$$

命題 2.1.12 より、このコエンドと有限極限は交換するので、次の同型が成り立つ。

$$X \times \Delta^1 \cong \int^n \coprod_{X_{n-1}} (\Delta^{n-1} \times \Delta^1)$$

この表示により、ホモトピー $X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ は各要素 $\Delta^{n-1} \times \Delta^1 \rightarrow Y$ を具体的に指定して定義することもできる。次の同値な定義は複雑だが、計算にはしばしば便利である。

定義 2.1.26 (組み合わせホモトピー). 二つの単体的集合の射 $f, g: X \rightarrow Y$ に対し、 f から g への組み合わせホモトピーとは、自然数 n および $0 \leq i \leq n$ で添え字付けられた写像

$h_i^n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ の組 $\{h_i^n\}_{n,i}$ であって、次の等式を満たすものことである。

$$\begin{aligned} d_0^{n+1} \circ h_0^n &= f_n \\ d_{n+1}^{n+1} \circ h_n^n &= g_n \\ d_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ d_i & (i < j) \\ d_i \circ h_{i-1} & (i = j \neq 0) \\ h_j \circ d_{i-1} & (i > j + 1) \end{cases} \\ s_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ s_i & (i \leq j) \\ h_j \circ s_{i-1} & (i > j) \end{cases} \end{aligned}$$

組み合わせホモトピー $\{h_i^n\}_{n,i}$ に対し、ホモトピー H が次のように復元できる。

各自然数 n に対し、 $H_n : X_n \times \Delta_n^1 \rightarrow Y_n$ を次のように定める。ただし、 $\phi \in \Delta_n^1 = \text{Hom}(n+1, 2)$ に注意。

$$H_n(x, \phi) = \begin{cases} f_n(x) & (\phi \equiv 0) \\ (d_{n-i} \circ h_{n-i})(x) & (\phi(i) = 0, \phi(i+1) = 1) \\ g_n(x) & (\phi \equiv 1) \end{cases}$$

2.1.6 SSet のモデル圏構造

SSet には余束生成モデル圏の構造が入る。これを見よう。まず、**SSet** 上の射 f が弱同値であるとは、幾何学的実現 $|f|$ が弱ホモトピー同値であることとする。弱同値全体の集合を W と置く。

次に、**SSet** 上の射 $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ 全体からなる集合を I と置く。 I が **SSet** 上の余束を生成するようにしたい。

最後に、非輪状余束を生成する集合 J を定めるため、次の定義をする。

定義 2.1.27 (ホーン). (n, i) -ホーン (horn) または角とは、 n -単体 Δ^n の境界から i 番目の面を除いたものことである。具体的には次のように定義される。今、 $\Delta^n = \text{Hom}(-, n+1)$ であった。ここで、 $(\Lambda_i^n)_{k-1} \subset \text{Hom}(k, n+1)$ を次のように定める。

$$(\Lambda_i^n)_{k-1} = \{f \mid \text{Im}(f) \neq n+1, (n+1) - \{i\}\}$$

こうして定まる部分単体的集合 $\Lambda_i^n \subset \Delta^n$ を (n, i) -ホーンと呼ぶ。

そこで、**SSet** 上の射 $\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n$ 全体からなる集合を J と置く。

W, I, J が **SSet** 上に余束生成圏の構造を定めることを見る。次のことを証明すればよい。

1. $\text{Cof}(J) \subset W \cap \text{Cof}(I)$ である。
2. $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ である。

- 3. $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。
- 4. I および J は小対象引数を許容する。

3. は明らかである。また、4. も例 1.2.17 より明らかである。

1. が成立することを見る。まず、各 $\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n$ は次のように分解できるため、これは $cell(I)$ に含まれる。

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & \partial\Delta^n & \longrightarrow & \Delta^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \partial\Delta^{n-1} & & \Delta^{n-1} & & \end{array}$$

よって $cell(J) \subset cell(I)$ であるので、 $Cof(J) \subset Cof(I)$ である。 $Cof(J) \subset W$ は命題??より従う。

2. を証明するには、もう少し準備が必要なので、後回しにする。

$Cof(I)$ は次のように非常に簡単である。

命題 2.1.28. $Cof(I) = \{f \text{ は単射}\}$

証明. 各 $f \in I$ は単射である。 \mathbf{SSet} 上で単射の押し出しは単射である。単射の超限合成は単射である。単射のレトラクトは単射である。よって $Cof(I) \subset \{f \text{ は単射}\}$ である。逆の包含を示す。

任意の単射 $f : X \rightarrow Y$ をとる。各自然数 i に対し、 $X^i \rightarrow X^{i+1}$ を次のように定める。まず、 $X^0 = X$ である。 $X^i \rightarrow X^{i+1}$ は次の図式が押し出しになるよう定める。

$$\begin{array}{ccc} X^i & \longrightarrow & X^{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_{Y_i=f(X_i)} \partial\Delta^i & \longrightarrow & \coprod_{Y_i=f(X_i)} \Delta^i \end{array}$$

こうして定まる列の超限合成は $f : X \rightarrow Y$ に一致する。 □

$Cof(J)$ の特徴づけとして現時点で言えることはないが、次のことがわかる。[3] では、鎮静拡張 (anodyne extension) と呼ばれる定義を用いて証明している。

補題 2.1.29.

- 1. 単体的集合 $\bar{\Delta}_i^n (i = 0, 1)$ を次の図式が押し出しになるよう定める。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \bar{\Delta}_i^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial\Delta^n & \xrightarrow{\delta_i} & \partial\Delta^n \times \Delta^1 \end{array}$$

このとき、カノニカルな射 $\bar{\Delta}_i^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ の集まりを J' とすると、 $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(J')$ が成り立つ。

2. 任意の単射 $A \subset X$ に対し、 $\delta_i : (X \times \Delta^0) \cup (A \times \Delta^1) \rightarrow X \times \Delta^1$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれる。

証明. 以下、特に断りのない場合 $i = 0$ の場合のみ示す。 $i = 1$ の場合も同様である。

1. まず、 $\text{Cof}(J) \supset \text{Cof}(J')$ を示す。そのためには $\text{Cof}(J) \supset J'$ を示せばよい。

$i = 0$ の場合のみ示す。 $i = 1$ の場合も同様である。

有限序数 $n + 1$ および 2 の集合としての積を T と書く。 T は半順序集合である。このとき、次のように表せる。

$$\Delta^n \times \Delta^1 = \text{Hom}(-, T)$$

$$(\bar{\Delta}_0^n)_k = \left\{ \phi = \phi_1 \times \phi_2 \in \text{Hom}(k+1, T) \left| \begin{array}{l} \text{Im}(\phi_1) \neq n+1, \\ \text{または,} \\ \text{Im}(\phi_2) = \{0\} \end{array} \right. \right\}$$

このとき、自然な包含 $\bar{\Delta}_0^n \subset \Delta^n \times \Delta^1$ がカノニカルな射に一致する。

各 $l \in n + 1$ に対し、順序を保つ単射 $\phi_l : n + 2 \rightarrow T$ を $\phi_l(l) = (l, 0)$, $\phi_l(l + 1) = (l, 1)$ で定める。単体的集合の拡大列 $\bar{\Delta}_0^n = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{n+1} = \Delta^n \times \Delta^1$ を、各 S_l は S_0 と $\phi_n, \dots, \phi_{n-l+1}$ をすべて含む $\Delta^n \times \Delta^1$ の最小の部分単体的集合として定める。この時、各拡大 $S_l \rightarrow S_{l+1}$ は次の図式の押し出しとして書ける。

$$\begin{array}{ccc} S_l & \longrightarrow & S_{l+1} \\ (\phi_{n-l})_* \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_{n-l}^{n+1} & \longrightarrow & \Delta^{n+1} \end{array}$$

よって $\bar{\Delta}_0^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ は $\text{cell}(J) \subset \text{Cof}(J)$ に含まれる。

次に、 $\text{Cof}(J) \subset \text{Cof}(J')$ を示す。 $J \subset \text{Cof}(J')$ を示せばよい。

各 $l \in n + 1$ に対し、順序を保つ全射 $\psi_l : T \rightarrow n + 1$ を

$$\begin{aligned} \psi_l(p, 0) &= \psi_l(p, 1) = p & (p \leq l) \\ \psi_l(p, 0) &= l & (p > l) \\ \psi_l(p, 1) &= p & (p > l) \end{aligned}$$

で定める。このとき、 $l < n$ ならば次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \Lambda_l^n & \xrightarrow{\delta_1} & \bar{\Lambda}_{l,0}^n & \xrightarrow{\psi_l} & \Lambda_l^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{\delta_1} & \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\psi_l} & \Delta^n \\ & & id & & \end{array}$$

ただし、単体的集合 $\bar{\Lambda}_{l,i}^n (i = 0, 1)$ を次の図式が押し出しになるよう定める。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \bar{\Lambda}_{l,i}^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda_l^n & \xrightarrow{\delta_i} & \Lambda_l^n \times \Delta^1 \end{array}$$

次の押し出し図式が存在することから、 $\bar{\Lambda}_{l,i}^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ は $cell(J')$ に含まれる。

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda}_{l,i}^n & \longrightarrow & \Delta^n \times \Delta^1 \\ \uparrow & & \uparrow \delta_i \\ \bar{\Delta}_i^{n-1} & \longrightarrow & \Delta^{n-1} \times \Delta^1 \end{array}$$

$\Lambda_l^n \rightarrow \Delta^n$ は $\bar{\Lambda}_{l,0}^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ のレトラクトであるので、これは $Cof(J')$ に含まれる。

ここまでは $l < n$ の場合であったが、 $l = n$ の場合も次のように示せる。順序を保つ全射 $\psi'_l : T \rightarrow n+1$ を

$$\begin{aligned} \psi'_l(p, 0) &= p & (p < l) \\ \psi'_l(p, 1) &= l & (p < l) \\ \psi'_l(p, 0) &= \psi'_l(p, 1) = p & (p \geq l) \end{aligned}$$

で定める。このとき、 $l > 0$ に対してほぼ同様の議論ができる。

2. 各自然数 n に対し、 $X^n \rightarrow X^{n+1}$ を次のように定める。まず、 $X^0 = X$ である。 $X^n \rightarrow X^{n+1}$ は次の図式が押し出しになるよう定める。

$$\begin{array}{ccc} X^n & \longrightarrow & X^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_{X_n - A_n} \bar{\Delta}_0^n & \longrightarrow & \coprod_{X_n - A_n} \Delta^n \times \Delta^1 \end{array}$$

こうして定まる列の超限合成は $\delta_0 : (X \times \Delta^0) \cup (A \times \Delta^1) \rightarrow X \times \Delta^1$ に一致する。□

さらに、次のこともわかる。

系 2.1.30. $f : A \rightarrow X$ と $g : B \rightarrow Y$ がともに単射で、 g は $Cof(J)$ に含まれていたとする。このとき、 $(A \times Y) \cup (X \times B) \rightarrow X \times Y$ は $llp(rlp(J))$ に含まれる。

証明. 次のように射のクラス \mathcal{T} を次のように定める。

$$\mathcal{T} = \{h : C \rightarrow Z \mid (A \times Z) \cup (X \times C) \rightarrow X \times Z \text{ は } llp(rlp(J)) \text{ に含まれる。}\}$$

1. \mathcal{T} は同型、押し出し、レトラクト、および超限合成について閉じている。

同型について閉じているのは明らか。次の押し出し図式について、 $h' \in \mathcal{T}$ であったとする。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & Z \\ \uparrow & & \uparrow \\ C' & \xrightarrow{h'} & Z' \end{array}$$

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} & & A \times Z & \longrightarrow & (A \times Z) \cup (X \times C) & \longrightarrow & X \times Z \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A \times Z' & \longrightarrow & (A \times Z') \cup (X \times C') & \xrightarrow{h} & X \times Z' & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & A \times C & \longrightarrow & X \times C & & \\ A \times C' & \longrightarrow & X \times C' & \xrightarrow{h'} & X \times Z' & & \end{array}$$

積が押し出しを保つことに注意すれば、図式追跡により $h \in \mathcal{T}$ が示せる。

$h: C \rightarrow Z$ が $(h': C' \rightarrow Z') \in \mathcal{T}$ のレトラクトであったとする。このとき、 $(A \times Z) \cup (X \times C) \rightarrow X \times Z$ は $(A \times Z') \cup (X \times C') \rightarrow X \times Z'$ のレトラクトである。よって $h \in \mathcal{T}$ である。

最後に、 $h: C \rightarrow Z$ が超限合成可能組 $\{C_\lambda\}$ の超限合成で、各 $C_\lambda \rightarrow C_{\lambda+1}$ が \mathcal{T} に含まれるとする。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} A \times C_\lambda & \longrightarrow & A \times Z & \longrightarrow & (A \times Z) \cup (X \times C) & \longrightarrow & X \times Z \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & A \times C & \longrightarrow & X \times C & \xrightarrow{h} & X \times C_\lambda \end{array}$$

積が超限合成を保つことに注意すれば、図式追跡により $h \in \mathcal{T}$ が示せる。

2. $J' \subset \mathcal{T}$ である。

$\bar{\Delta}_i^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ について、 $(A \times \Delta^n \times \Delta^1) \cup (X \times \bar{\Delta}_i^n) \rightarrow X \times \Delta^n \times \Delta^1$ が $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれることを示せばよい。これは、 $(A \times \Delta^n) \cup (X \times \partial \Delta^n) \subset X \times \Delta^n$ について補題 2.1.29 を適用したものと同型である。

3. $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(J') \subset \mathcal{T}$ である。

1. と 2. より明らか。 □

2.1.7 幾何学的実現は左完全

表題通り幾何学的実現をとる関手 $|-|: \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ が左完全であることを示す。まず、命題 2.1.12 より、 $|-|$ は集合のレベルでは左完全である。あとは位相がうまく定まればよい。

命題 2.1.31. \mathbf{SSet} 上の単射の幾何学的実現は閉埋め込みである。

証明. 任意の単射は I -相対セル複体であった。幾何学的実現は余極限を保つので、これは \mathbf{Top} 上の相対セル複体に移される。相対セル複体は閉埋め込みである。 \square

命題 2.1.32. 関手 $|-|: \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ は差核 (*equalizer*) を保つ。

証明. $|-|$ は集合のレベルでは差核を保つ。また、単射を閉埋め込みに移すので、特に差核には相対位相が入っている。 \square

命題 2.1.33. 関手 $|-|: \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ は積を保つ。

証明. 任意の単体的対象 X と Y について、自然に $|X \times Y| \rightarrow |X| \times |Y|$ なる全単射連続写像が存在する。これが同相であることを示す。

$X = \Delta^p, Y = \Delta^q$ の場合

$|\Delta^p \times \Delta^q|$ がコンパクトであれば、コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像は閉写像だから、全単射であれば同相である。今、有限序数の積 $(p+1) \times (q+1)$ は半順序集合である。順序拡大原理 (Order-extension principle) より、 $(p+1) \times (q+1)$ は全順序に拡大できる。これはすなわち、 $\Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \Delta^{(p+1)(q+1)-1}$ なる埋め込みが存在することを意味する。単射の幾何学的実現は閉埋め込みであったので、閉埋め込み $|\Delta^p \times \Delta^q| \rightarrow |\Delta^{(p+1)(q+1)-1}|$ はコンパクト部分集合と同相である。

一般の場合

米田埋め込み $\Delta \rightarrow \mathbf{SSet}$ は稠密であるので、任意の単体的集合 X はコエンドを用いて次のように書ける。(これは \mathbf{SSet} に値を持つコエンドであることに注意。)

$$X \cong \int^n \prod_{X_{n-1}} \Delta^{n-1}$$

Y も同様に表せば、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} |X \times Y| &\cong |(\int^p \prod_{X_{p-1}} \Delta^{p-1}) \times (\int^q \prod_{Y_{q-1}} \Delta^{q-1})| \\ &\cong |\int^p \int^q \prod_{X_{p-1} \times Y_{q-1}} \Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}| && \text{(命題 2.1.12)} \\ &\cong \int^p \int^q \prod_{X_{p-1} \times Y_{q-1}} |\Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}| && \text{(幾何学的実現は余極限を保つ)} \\ &\cong \int^p \int^q \prod_{X_{p-1} \times Y_{q-1}} |\Delta^{p-1}| \times |\Delta^{q-1}| \\ &\cong |\int^p \prod_{X_{p-1}} \Delta^{p-1}| \times |\int^q \prod_{Y_{q-1}} \Delta^{q-1}| && \text{(コンパクト生成ハウスドルフ空間の積は余極限を保つ)} \\ &\cong |X| \times |Y| \end{aligned}$$

\square

以上より、直ちに次が成り立つ。

命題 2.1.34. 関手 $|-|: \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ は任意の有限極限を保つ。

2.1.8 Kan 束

単体的集合の圏のモデル圏構造における束を Kan 束と呼ぶ。

定義 2.1.35 (Kan 束). 各 $f \in \text{rlp}(J)$ を Kan 束 (Kan fibration) または Kan ファイブレーションと呼ぶ。具体的には次のように定義できる。

単体的空間の射 $f : E \rightarrow B$ が Kan 束であるとは、次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

$\text{rlp}(I)$ に含まれる Kan 束を非輪状 Kan 束と呼ぶ。

同様に束対象を Kan 複体と呼ぶ。

定義 2.1.36 (Kan 複体). 単体的集合 X が Kan 複体 (Kan complex) であるとは、唯一つの射 $X \rightarrow \Delta^0$ が Kan 束であることである。 $X \rightarrow \Delta^0$ が $\text{rlp}(I)$ に含まれるとき、 X を非輪状 Kan 複体と呼ぶ。

非輪状 Kan 複体について、直ちに次が言える。

命題 2.1.37. 非輪状 Kan 複体は可縮である。すなわち、 $f : X \rightarrow \Delta^0$ が $\text{rlp}(I)$ に含まれるとき、 f はホモトピー逆射を持つ。

証明. 次の図式が持ち上げ g を持つ。

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ \Delta^0 & \xlongequal{\quad} & \Delta^0 \end{array}$$

また、次の図式の持ち上げが id から $g \circ f$ へのホモトピーを定めるので、 g は f のホモトピー逆射である。

$$\begin{array}{ccc} X \times \partial\Delta^1 & \xrightarrow{id \amalg (g \circ f)} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ X \times \Delta^1 & \xlongequal{\quad} & \Delta^0 \end{array}$$

□

極小 Kan 束

しばらく未定義語による説明を続けよう。単体的集合の圏 \mathbf{SSet} は、Kan 束を fibration としてモデル圏の構造を持つ。 \mathbf{SSet} における極小束 (minimal fibration) を極小 Kan 束 (minimal Kan fibration) と呼ぶ。さらに \mathbf{SSet} 上では、任意の fibration が極小分解 (minimal resolution) を持つ。(一般的な極小対象 (minimal object) については [6] を参照。)

極小 Kan 束および、Kan 束の極小分解について厳密な定義を述べよう。

定義 2.1.38. Kan 束 $f : E \rightarrow B$ が (左) 極小 (minimal) であるとは、次を満たすことである。

- Kan 束 $f' : E' \rightarrow B$ およびホモトピー同値 (すなわちホモトピー逆射を持つ) $e : E' \rightarrow E$ で $f \circ e = f'$ を満たすものが存在した時、 e の右切断 e' (i.e. $e \circ e' = id$) で $f = f' \circ e'$ を満たすものが存在する。

Kan 束 $f : E \rightarrow B$ の極小分解 (minimal resolution) とは、ホモトピー同値 $e : E \rightarrow E'$ と極小 Kan 束 $f' : E' \rightarrow B$ の組であって、 $f' \circ e = f$ を満たすもののことである。

極小分解は常に存在する。

命題 2.1.39.

1. Kan 束 $f : E \rightarrow B$ が極小であることは、次の条件と同値である。

- 次の図式を可換とする h が存在したとする。

$$\begin{array}{ccc}
 (\partial\Delta^n) \times \Delta^1 & \xrightarrow{pr_1} & \partial\Delta^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & E \\
 \downarrow pr_1 & & \downarrow f \\
 \Delta^n & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

この時、次の平行な二つの射は一致する。

$$\Delta^n \begin{array}{c} \xrightarrow{id \times \delta_0} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{id \times \delta_1} \end{array} \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{h} E$$

2. 任意の Kan 束は極小分解を持つ。

証明. 証明を次の三段階に分ける。

- (1) 1. の条件は十分条件であり、このとき分解を定めるホモトピー同値 e は変位レトラクションとしてよい。
- (2) 2. が 1. の条件を満たすものとして構成される

(3) 1. の条件は必要十分条件である。

(2) の構成が確かに極小分解を与えることは (1) により従う。まず、(1) と (2) から (3) が従うことを示そう。Kan 束 $f: E \rightarrow B$ が極小であったとする。(2) より、 f の極小分解 $f' \circ e = f$ で、 f' が 1. の条件を満たすもの、 e が変位レトラクションとしてとれる。(1) より f' は確かに極小 Kan 束である。よって、 e のホモトピー逆射を定める右切断 e' (i.e. $e \circ e' = id$) が存在し、これは $f = f' \circ e'$ を満たす。 $f: E \rightarrow B$ は極小であったので、 e' も右切断を持つが、これは e に一致しなければならない。よって、 f と f' は同型である。特に、 f は 1. の条件を満たす。

次に (1) を示そう。Kan 束 $f: E \rightarrow B$ が 1. の条件を満たすと仮定する。さらに、Kan 束 $f': E' \rightarrow B$ およびホモトピー同値 $e: E' \rightarrow E$ で $f \circ e = f'$ を満たすものが存在したと仮定する。 e のホモトピー逆射 $e': E' \rightarrow E$ をとる。 $e \circ e' = id$ を示せばよい。任意の $x: \Delta^n \rightarrow E$ をとる。このとき、 $e \circ e' \circ x$ と x はホモトピックである。1. の条件より $e \circ e' \circ x = x$ である。 $x: \Delta^n \rightarrow E$ は任意だったので、 $e \circ e' = id$ である。

最後に (2) を示そう。概要のみ述べる。まず E の単体的部分集合 $E^{(0)}$ を次のように定める。米田の補題により、射 $\Delta^0 \rightarrow E$ は E_0 に含まれる各頂点と一対一に対応する。そこで、 f のファイバーを保つ $\Delta^0 \rightarrow E$ のホモトピー類の代表元を一つ選び、それが生成する 0-スケルトンを $E^{(0)}$ とする。今度は、 $E^{(1)}$ を次のように構成する。やはり米田の補題により、射 $\Delta^1 \rightarrow E$ は E_1 に含まれる各 1-単体と一対一に対応する。そこで、 f のファイバーを保つ $\Delta^1 \rightarrow E$ のホモトピー類の代表元であって、頂点が $E^{(0)}$ に含まれるものを選び、それが生成する 1-スケルトンを $E^{(1)}$ とする。このような構成を繰り返し、単体的部分集合列 $E^{(0)} \subset E^{(1)} \subset \dots \subset E$ ができる。そこで $E' = \bigcup E^{(n)}$ とし、 $f' = f|_{E'}$ とすると、これが求めるものである。□

注意 2.1.40. 上記の証明より、 $f' \circ e = f$ が f の極小分解ならば、 e は変位レトラクションである。

任意の極小分解は“非輪状分解”である。

命題 2.1.41 (Quillen[5]). 任意の Kan 束 $f: E \rightarrow B$ の極小分解 $f' \circ e = f$ に対し、 $e \in \text{rlp}(I)$ である。

証明. e のホモトピー逆射を定める右切断を $j: E' \rightarrow E$ と置く。 $j \circ e$ から id_E へのホモトピーを $h: E \times \Delta^1 \rightarrow E$ と置く。次の図式がリフト γ を持てばよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & E \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow e \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & E' \end{array}$$

補題 2.1.29 より、次の図式はリフト γ' を持つ。

$$\begin{array}{ccc}
 (\partial\Delta^n \times \Delta^1) \cup (\Delta^n \times \{0\}) & \xrightarrow{(ho\alpha) \cup (j\circ\beta)} & E \\
 \downarrow & \nearrow \gamma' & \downarrow f \\
 \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{pr_1} & \Delta^n \xrightarrow{f' \circ \beta} B
 \end{array}$$

γ' を $\delta_0 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$ によって制限したものを γ と置く。 γ の $\partial\Delta^n$ への制限は α に一致する。また、 e と γ の合成は境界と f' のファイバーを保って β とホモトピックである。 f' は極小だから、 $e \circ \gamma = \beta$ である。すなわち、 γ が求めるリフトである。 \square

命題 2.1.42. 極小 Kan 束の引き戻しは極小 Kan 束である。

証明. g が極小 Kan 束であり、 f は g の引き戻しとする。Kan 束の引き戻しは Kan 束だから、 f は Kan 束である。

極小性を示すため、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 (\partial\Delta^n) \times \Delta^1 & \xrightarrow{pr_1} & \partial\Delta^n & \xlongequal{\quad} & \partial\Delta^n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{\alpha} & E' \\
 \downarrow pr_1 & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 \Delta^n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'
 \end{array}$$

g が極小 Kan 束であることから、次の平行な二つの射は一致する。

$$\Delta^n \begin{array}{c} \xrightarrow{id \times \delta_0} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{id \times \delta_1} \end{array} \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{\alpha \circ h} E'$$

引き戻しの普遍性より、次の平行な二つの射は一致する。

$$\Delta^n \begin{array}{c} \xrightarrow{id \times \delta_0} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{id \times \delta_1} \end{array} \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{h} E$$

\square

命題 2.1.43. $f : E \rightarrow B$ は Kan 束とし、二つの射 $g_0, g_1 : X \rightarrow B$ について、次の引き戻し図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 g_i^* E & \longrightarrow & E \\
 f_i \downarrow & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{g_i} & B
 \end{array}$$

g_0 と g_1 がホモトピックならば、次の図式を可換にするホモトピー同値 $g_0^*E \rightarrow g_1^*E$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} g_0^*E & \xrightarrow{\cong} & g_1^*E \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

証明. g_0 から g_1 へのホモトピー H をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} g_i^*E & \longrightarrow & H^*E & \longrightarrow & E \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_H & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\delta_i} & X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Kan 束 f の引き戻し f_H は Kan 束だから、補題 2.1.29 より、次の四角に対して図式を可換にする斜めの射が存在する。

$$\begin{array}{ccc} g_0^*E & \longrightarrow & H^*E \\ \delta_0 \downarrow & \nearrow \theta & \downarrow f_H \\ g_0^*E \times \Delta^1 & \xrightarrow{f_0 \times id} & X \times \Delta^1 \end{array}$$

次の図式の引き戻しの普遍性より、図式を可換にする θ_* が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} g_0^*E & \xrightarrow{\delta_1} & g_0^*E \times \Delta^1 & & \\ \theta_* \nearrow & & \searrow \theta & & \\ & & g_1^*E & \longrightarrow & H^*E \\ f_0 \searrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_H \\ & & X & \xrightarrow{id \times \delta_1} & X \times \Delta^1 \end{array}$$

全く同様に、次の図式を可換にする ω および ω_* が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 g_1^*E & \longrightarrow & H^*E \\
 \delta_1 \downarrow & \nearrow \omega & \downarrow f_H \\
 g_1^*E \times \Delta^1 & \xrightarrow{f_1 \times id} & X \times \Delta^1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 g_1^*E & \xrightarrow{\delta_0} & g_1^*E \times \Delta^1 & & \\
 \omega_* \searrow & & \downarrow \theta & & \\
 g_0^*E & \longrightarrow & H^*E & & \\
 f_1 \searrow & & \downarrow f_H & & \\
 X & \xrightarrow{id \times \delta_0} & X \times \Delta^1 & & \\
 & & \downarrow f_0 & & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

ω_* が θ_* のホモトピー逆射になることを示す。まず、次の図式の押し出しの普遍性より、図式を可換にする α が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^*E \times \Delta^1 \\
 & \nearrow \theta & \\
 g_0^*E \times \Delta^1 & \longrightarrow & g_0^*E \times \Lambda_2^2 \\
 \delta_1 \uparrow & & \uparrow \\
 g_0^*E & \xrightarrow{\delta_1} & g_0^*E \times \Delta^1 \\
 & \searrow \omega \circ (\theta_* \times id) & \nearrow \alpha
 \end{array}$$

f_H は Kan 束だから、系 2.1.30 より、次の四角に対して図式を可換にする斜めの射 γ が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 g_0^*E \times \Lambda_2^2 & \xrightarrow{\alpha} & H^*E \\
 \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f_H \\
 g_0^*E \times \Delta^2 & \xrightarrow{f_0 \times \sigma_1} & X \times \Delta^1
 \end{array}$$

次の図式の引き戻しの普遍性より、図式を可換にする γ_* が存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
 g_0^*E \times \Delta^1 & \xrightarrow{id \times \delta_0} & g_0^*E \times \Delta^2 & & \\
 \downarrow pr_1 & \searrow \gamma_* & \downarrow \gamma & & \\
 g_0^*E & \longrightarrow & g_0^*E & \longrightarrow & H^*E \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_H \\
 g_0^*E & \xrightarrow{f_0} & X & \xrightarrow{id \times \delta_0} & X \times \Delta^1
 \end{array}$$

この時、 γ_* は $\omega_* \circ \theta_*$ から id へのホモトピーを定める。同様に $\theta_* \circ \omega_*$ から id へのホモトピーも構成できるので、 ω_* は θ_* のホモトピー逆射である。 \square

補題 2.1.44. 任意の極小 Kan 束 $f : E \rightarrow B$ は局所自明である。すなわち、任意の埋め込み $\Delta^n \rightarrow B$ に対し、 f の引き戻し $\Delta^n \times_B E \rightarrow \Delta^n$ は自明束である。

特に、極小 Kan 束の幾何学的実現は Serre 束である。

証明. f が極小 Kan 束であるとする。 f の引き戻し $\Delta^n \times_B E \rightarrow \Delta^n$ は極小 Kan 束である。一方、 $\Delta^n \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \Delta^n$ なる任意の射による引き戻しは自明束 $F \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ である。これらはホモトピー同値だが、どちらも極小 Kan 束なので、これらは同型である。 \square

Kan 束の幾何学的実現

補題 2.1.45 (Quillen[5]). 任意の $f \in \text{rlp}(I)$ は自明束のレトラクトである。特に、 $f \in \text{rlp}(I)$ の幾何学的実現は Serre 束である。

さらに、上記の自明束のファイバーは可縮としてよい。特に、 $f \in \text{rlp}(I)$ の幾何学的実現は弱ホモトピー同値である。

証明. $f : X \rightarrow Y$ が $\text{rlp}(I)$ に含まれているとする。 $X \rightarrow \Delta^0$ について、命題 1.2.21 より、 $X \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} \Delta^0$ なる分解で $i \in \text{cell}(I)$, $p \in \text{rlp}(I)$ なるものが取れる。命題 2.1.38 より W は可縮である。 $i \in \text{cell}(I)$ は単射であるので、 $i \times f : X \rightarrow W \times Y$ は単射である。すなわち、 $i \times f$ は $\text{Cof}(I)$ に含まれる。よって、次の図式はリフトを持つ。

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ i \times f \downarrow & & \downarrow f \\ W \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y \end{array}$$

すなわち、 f は $\text{pr}_2 : W \times Y \rightarrow Y$ のレトラクトである。 \square

命題 2.1.46. $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である。

証明. $J \subset \text{cell}(I)$ より $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J)$ である。また、補題 2.1.46 より $\text{rlp}(I) \subset W$ である。 \square

命題 2.1.47 (Quillen[5]). 任意の Kan 束の幾何学的実現は Serre 束である。

証明. 任意の Kan 束 f をとり、 f の極小分解 $f = f' \circ e$ をとる。補題 2.1.45 より極小 Kan 束 f' の幾何学的実現は Serre 束である。また、命題 2.1.42 より $e \in \text{rlp}(I)$ だから、補題 2.1.46 より e の幾何学的実現は Serre 束である。よって、 f の幾何学的実現は Serre 束の合成なので Serre 束である。 \square

2.1.9 ループ空間と連結性

\mathbf{SSet} がモデル圏であるための最後の条件は難しい。なぜなら、幾何学的実現を与える関手が、非輪状の性質を引き戻す必要があるからである。しかし、 $\partial\Delta^1 \rightarrow \Delta^1$ に対して右リフト性質を持つことは（弧状）連結性を意味し、比較的理解しやすい。本節では、ループ空間を導入して、高次の連結性を低次の連結性に帰着することを考える。

連結性

まず、単体的集合の（弧状）連結性を定義する。

定義 2.1.48 (連結). 自然数 n を固定する。単体的集合 X が n -連結であるとは、任意の $0 \leq m \leq n+1$ に対し、次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^m & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^m & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

特に、0-連結であるとき（単に）連結であるといい、1-連結であるとき単連結であるという。

X が (-1)-連結であるとは、 X が空でないことである。特に、連結な単体的集合は空でない。

単体的集合が連結であることは、任意の二点がホモトピックであることと同値である。連結性は、Kan 複体について上手くふるまう。まずは次が成り立つ。

補題 2.1.49. Y を Kan 複体とすると、任意の単射 $A \rightarrow X$ に対して $Y^X \rightarrow Y^A$ は Kan 束である。特に $A = \emptyset$ とすれば、 Y^X は Kan 複体である。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & Y^X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y^A \end{array}$$

上記の図式がリフトを持つことは、次の図式がリフトを持つことと同値であるが、 Y は Kan 複体だったのでこのリフトは存在する。

$$\begin{array}{ccc} (X \times \Lambda_i^n) \times (A \times \Delta^n) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

□

命題 2.1.50. Y を Kan 複体とすると、任意の単体的集合 X に対して射 $X \rightarrow Y$ の間のホモトピック関係は同値関係である。

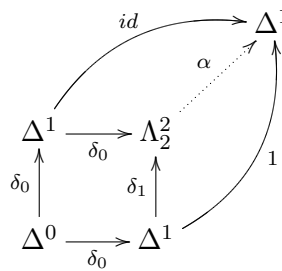
証明. ホモトピー $X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ は、二点間のホモトピー $\Delta^1 \rightarrow Y^X$ と一対一に対応する。補題 2.1.50 より Y^X も Kan 複体なので、 $X = \Delta^0$ の場合のみ示せばよい。

反射律

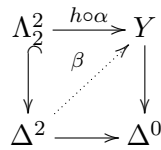
任意の点 $y : \Delta^0 \rightarrow Y$ に対し、 $\Delta^1 \rightarrow \Delta^0$ を合成したものは y から y へのホモトピーである。

対称律

点 x から点 y へのホモトピー $h : \Delta^1 \rightarrow Y$ をとる。 $\alpha : \Lambda_2^2 \rightarrow \Delta^1$ を押し出し関式の普遍性によって定める。



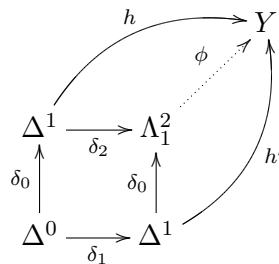
Y が Kan 複体だから、次の四角形の可換図式がリフト β を持つ。



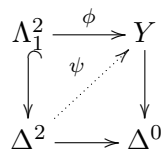
$\beta \circ \delta_2 : \Delta^1 \rightarrow Y$ は y から x へのホモトピーである。

推移律

点 x から点 y へのホモトピー $h : \Delta^1 \rightarrow Y$ および、点 y から点 z へのホモトピー $h' : \Delta^1 \rightarrow Y$ をとる。 $\phi : \Lambda_1^2 \rightarrow Y$ を押し出し関式の普遍性によって定める。



Y が Kan 複体だから、次の四角形の可換図式がリフト ψ を持つ。



$\psi \circ \delta_1 : \Delta^1 \rightarrow Y$ は x から z へのホモトピーである。 □

また、補題 2.1.29 と同様に次のことも示せる。

補題 2.1.51. 1 以上の自然数 n を固定する。 $f : X \rightarrow Y$ は Kan 束とする。 $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ が f に対して左リフト性質を満たすならば、 $(\partial\Delta^1 \times \Delta^{n-1}) \cup (\Delta^1 \times \partial\Delta^{n-1}) \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ も f に対して左リフト性質を満たす。

写像錐

この後の議論で便利のため、写像錐の概念を導入しておく。

定義 2.1.52 (写像錐). 単体的集合の射 $f : X \rightarrow Y$ に対し、 f の錐 (cone) とは、次の押し出しで定まる単体的集合 $Cone(f)$ のことである。

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^1 & \longrightarrow & Cone(f) \\ \delta_0 \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

特に、 $Y = \Delta^0$ のとき、 $Cone(f)$ を $Cone(X)$ と書く。

何のために導入するかというと、射が“一点とホモトピック”という性質を扱いやすくするためである。錐に対して次が成り立つ。

補題 2.1.53. 次の図式が可換とする。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

$A \rightarrow X$ が単射ならば、 $Cone(A \rightarrow Y) \rightarrow Cone(X \rightarrow Y)$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれる。

証明. 次の図式のすべての四角は押し出しである。

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times \Delta^1 & \longrightarrow & Cone(X \rightarrow Y) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ A \times \Delta^1 & \longrightarrow & (A \times \Delta^1) \cup (X \times \{1\}) & \longrightarrow & Cone(A \rightarrow Y) \\ \delta_0 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

系 2.1.30 より $(A \times \Delta^1) \cup (X \times \{1\}) \rightarrow X \times \Delta^1$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれるので、その押し出しである $Cone(A \rightarrow Y) \rightarrow Cone(X \rightarrow Y)$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれる。 □

次の補題により、連結性は特定の射が一点とホモトピックであることと言い換えられる。

補題 2.1.54. 射 $f : \partial\Delta^n \rightarrow X$ を固定する。 X が *Kan* 複体ならば、以下はすべては同値である。

1. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

2. f は一点とホモトピックである。

3. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \delta_1 & \nearrow & \downarrow \\ Cone(\partial\Delta^n) & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

証明. 2. \Leftrightarrow 3. は明らか。 3. \Rightarrow 1. は、補題 2.1.54 によって $Cone(\partial\Delta^n)$ を $Cone(\Delta^n)$ に拡張し、 $\delta_1 : \Delta^n \rightarrow Cone(\Delta^n)$ に制限すればよい。

1. \Rightarrow 3. は、もし $\delta_1 : \Delta^n \rightarrow Cone(\Delta^n)$ の左逆射が存在すれば、それを $Cone(\partial\Delta^n)$ に制限すればよい。そのような左逆射は次のように構成する。

半順序集合の間の順序を保つ写像 $\phi : (n+1) \times 2 \rightarrow (n+1)$ を、 $\phi(i, 0) = i$, $\phi(i, 1) = n$ によって定める。 ϕ に対応する射 $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^n$ は、押し出しの普遍性により $Cone(\Delta^n) \rightarrow \Delta^n$ に降る。これが求める左逆射である。 \square

ループ空間

連結性の理解を深めるため、次の定義を行う。

定義 2.1.55 (道空間とループ空間). **SSet** 上の冪対象 X^{Δ^n} を特別に $P^{n*}(X)$ と書く。† 単体的集合 X 上の道空間 (*path space*) とは、 $P(X) = P^{1*}(X)$ のことである。

$s : \Delta^0 \rightarrow X^{\partial\Delta^n}$ を固定する。単体的集合 $\Omega^{n*}(X, s)$ を次の引き戻しで定義する。†

$$\begin{array}{ccc} P^{n*}(X) & \longrightarrow & X^{\partial\Delta^n} \\ \uparrow & & \uparrow s \\ \Omega^{n*}(X, x_0, y_0) & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

特に $s : \partial\Delta^n \rightarrow X$ が一つの基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ を用いて $s : \partial\Delta^n \rightarrow \Delta^0 \xrightarrow{x_0} X$ と表される時、 $\Omega^{n*}(X, s)$ を $\Omega^{n*}(X, x_0)$ と書く。 $\Omega^{1*}(X, x_0)$ を x_0 を基点とする X 上のループ空間 (*loop space*) と呼び、 $\Omega(X, x_0)$ と書く。

注意 2.1.56. $\Omega^{n*}(X, x_0)$ は、定値射 $\Delta^n \rightarrow \Delta^0 \xrightarrow{x_0} X$ に対応する基点 $\Delta^0 \rightarrow \Omega^{n*}(X, x_0)$ を持つ。

道空間については次のことが成り立つ。

命題 2.1.57. X が Kan 複体ならば $P^{n*}(X) \rightarrow X^{\partial\Delta^n}$ は Kan 束である。特に、 $\Omega^{n*}(X, s)$ は Kan 複体である。

証明. $P^{n*}(X) \rightarrow X^{\partial\Delta^n}$ が Kan 束ならば、その引き戻しである $\Omega^{n*}(X, s) \rightarrow \Delta^0$ も Kan 束である。 $P^{n*}(X) \rightarrow X^{\partial\Delta^n}$ が Kan 束であることは補題 2.1.50 より従う。□

ホモトピー同値は連結性を保つ。

命題 2.1.58. 自然数 n を固定する。 X と Y が Kan 複体で、 $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値を定めているとする。このとき、以下は同値である。

1. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

2. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

証明. 補題 2.1.55 より以下が同値であることを示せばよいが、これは $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値であることより明らか。

1. 任意の $\partial\Delta^n \rightarrow X$ は一点とホモトピックである。
2. 任意の $\partial\Delta^n \rightarrow Y$ は一点とホモトピックである。

□

特に、任意のループ空間は同一の連結性を持つ。

命題 2.1.59. 自然数 n, m を固定する。 X を Kan 複体とし、二つの射 $s, t: \Delta^0 \rightarrow X^{\partial\Delta^n}$ をとる。 s と t がホモトピックならば、以下は同値である。

1. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^m & \longrightarrow & \Omega^{n*}(X, s) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^m & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

2. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^m & \longrightarrow & \Omega^{n*}(X, t) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^m & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

証明. s と t がホモトピックならば、 $\Omega^{n*}(X, s)$ と $\Omega^{n*}(X, t)$ がホモトピー同値であることより明らか。□

懸垂

ループ空間はそのままでは扱いにくいので、次の定義をする。

定義 2.1.60 (懸垂). 単体的集合 X に対し、 X の n -懸垂[†]とは、次の押し出しで定まる単体的集合 $S^{n*}(X)$ のことである。

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^n & \longrightarrow & S^{n*}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \times \partial\Delta^n & \longrightarrow & \partial\Delta^n \end{array}$$

$S^{1*}(X)$ のことを $S(X)$ と書き、単に懸垂 (*suspension*) と呼ぶ。

懸垂 $S^{(n-1)*}(\partial\Delta^1) \rightarrow S^{(n-1)*}(\Delta^1)$ を $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ のように扱いたい。実際、次の性質が成り立つ。

補題 2.1.61. 1 以上の自然数 n を固定する。 X が Kan 複体ならば、以下はすべては同値である。

1. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

2. 次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} S^{(n-1)*}(\partial\Delta^1) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ S^{(n-1)*}(\Delta^1) & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

3. 任意の $s : \Delta^0 \rightarrow X^{\partial\Delta^{(n-1)}}$ に対し、次の四角形の可換図式が存在した時、斜めの射が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
 \partial\Delta^1 & \longrightarrow & \Omega^{(n-1)*}(X, s) \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta^1 & \longrightarrow & \Delta^0
 \end{array}$$

証明. 2. \Leftrightarrow 3. は明らか。

1. \Rightarrow 3.

次の図式のすべての四角は押し出しである。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Delta^1 \times \Delta^{n-1} & \longrightarrow & S^{(n-1)*}(\Delta^1) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 \partial\Delta^1 \times \Delta^{n-1} & \longrightarrow & (\partial\Delta^1 \times \Delta^{n-1}) \cup (\Delta^1 \times \partial\Delta^{n-1}) & \longrightarrow & S^{(n-1)*}(\partial\Delta^1) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \partial\Delta^1 \times \partial\Delta^{n-1} & \longrightarrow & \Delta^1 \times \partial\Delta^{n-1} & \longrightarrow & \partial\Delta^{n-1}
 \end{array}$$

補題 2.1.52 より $(\partial\Delta^1 \times \Delta^{n-1}) \cup (\Delta^1 \times \partial\Delta^{n-1}) \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ は $X \rightarrow \Delta^0$ に対して左リフト性質を満たす。よって 3. が従う。

3. \Rightarrow 1.

補題 2.1.55 より、任意の射 $f : \partial\Delta^n \rightarrow X$ が一点とホモトピックであることを示せばよい。 X が Kan 複体だから、 $\Lambda_n^n \rightarrow \partial\Delta^n \xrightarrow{f} X$ は $g : \Delta^n \rightarrow X$ に拡張できる。 $(f \circ \delta_n) \cup (g \circ \delta_n) : S^{(n-1)*}(\partial\Delta^1) \rightarrow X$ について 3. を適用すれば、 $f \circ \delta_n$ と $g \circ \delta_n$ は境界を固定してホモトピックである。よって、 g の $\partial\Delta^n$ への制限を g' と書けば、 f と g' はホモトピックである。 g' は一点とホモトピックなので、結局 f は一点とホモトピックである。 \square

ループ空間と連結性

ループ空間による連結性の特徴づけを行うため、補題を準備する。これは、“ホモトピー長完全列”の特殊な場合である。

補題 2.1.62. 自然数 n を固定する。 $f : Y \rightarrow X$ を Kan 束とする。各基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、単体的集合 F_{x_0} を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{array}{ccc}
 F_{x_0} & \xrightarrow{\iota_{x_0}} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 \Delta^0 & \xrightarrow{x_0} & X
 \end{array}$$

Y が可縮で X が Kan 複体ならば、以下はすべて同値である。

1. X は n -連結である。
2. 任意の基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、 F_{x_0} は $(n-1)$ -連結である。

証明.

1. \Rightarrow 2.

任意の $0 \leq m \leq n-1$ および $p : \partial\Delta^m \rightarrow F_{x_0}$ をとる。 Y は可縮だから、 $\iota_{x_0} \circ p$ は一点とホモトピックである。すなわち、 $\iota_{x_0} \circ p$ から一点へのホモトピー $h : Cone(\partial\Delta^m) \rightarrow Y$ が存在する。さらに、 $f \circ h$ は一点 x_0 から一点へのホモトピーなので、 $S^{m*}(\partial\Delta^1) \rightarrow X$ と見なせる。1. および補題 2.1.62 より $f \circ h$ は $g : S^{m*}(\Delta^1) \rightarrow X$ に拡張できる。補題 2.1.54 より、次の図式はリフト γ を持つ。

$$\begin{array}{ccc} Cone(\partial\Delta^m) & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ Cone(\Delta^m) & \xrightarrow{g} & S^{m*}(\Delta^1) \xrightarrow{g} X \end{array}$$

γ を $\delta_1 : \Delta^m \rightarrow Cone(\Delta^m)$ に制限すれば、これは p の拡張である。

2. \Rightarrow 1.

まず、 f が Kan 束だから任意の $\partial\Delta^1 \cong \Delta^0 \amalg \Delta^0 \rightarrow X$ は持ち上げ $\partial\Delta^1 \rightarrow Y$ を持つ。 Y は可縮だからこれはホモトピー $\Delta^1 \rightarrow Y$ で結べる。よって X は連結である。

次に、任意の $0 \leq m \leq n-1$ および $g : S^{m*}(\partial\Delta^1) \rightarrow X$ をとる。補題 2.1.62 より、 g が $S^{m*}(\Delta^1) \rightarrow X$ に拡張できればよい。 $\delta_0 : \partial\Delta^m \rightarrow \partial\Delta^m \times \Delta^1$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれるので、その押し出しである $\delta_0 : \Delta^0 \rightarrow Cone(\partial\Delta^m)$ は $\text{llp}(\text{rlp}(J))$ に含まれる。よって、次の図式はリフト γ を持つ。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ Cone(\partial\Delta^m) & \xrightarrow{g} & S^{m*}(\partial\Delta^1) \xrightarrow{g} X \end{array}$$

γ の $\delta_1 : \partial\Delta^m \rightarrow Cone(\partial\Delta^m)$ への制限を p と置く。 $f \circ p$ は一点射 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ を經由するので、 p の値域は F_{x_0} としてよい。2. より p は $\Delta^m \rightarrow F_{x_0}$ に拡張できる。これは境界で γ と張り合うので、 $\gamma' : \partial Cone(\Delta^m) \rightarrow Y$ が定まる。次の図式のすべての四角は押し出しであるので、補題 2.1.52 と Y が可縮であることより $\partial Cone(\Delta^m) \rightarrow Cone(\Delta^m)$ は

$Y \rightarrow \Delta^0$ に対して左リフト性質を満たす。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Delta^m \times \Delta^1 & \longrightarrow & Cone(\Delta^m) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 \Delta^m & \xrightarrow{\delta_1} & (\partial\Delta^m \times \Delta^1) \cup (\Delta^m \times \partial\Delta^1) & \longrightarrow & \partial Cone(\Delta^m) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \partial\Delta^m & \xrightarrow{\delta_1} & \partial\Delta^m \times \Delta^1 & \longrightarrow & Cone(\partial\Delta^m) \\
 & \delta_0 \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & \partial\Delta^m & \longrightarrow & \Delta^m & \longrightarrow \Delta^0
 \end{array}$$

すなわち、 γ' は $g' : Cone(\Delta^m) \rightarrow Y$ へ拡張できる。 $f \circ g'$ は $S^{m*}(\Delta^1) \rightarrow X$ と見なせ、これは g の拡張である。□

直ちに次がわかる。

系 2.1.63. 自然数 n を固定する。 X が Kan 複体ならば、以下はすべて同値である。

1. X は n -連結である。
2. X は連結、かつ、少なくとも一つの基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、ループ空間 $\Omega(X, x_0)$ は $(n-1)$ -連結である。
3. X は連結、かつ、任意の基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、ループ空間 $\Omega(X, x_0)$ は $(n-1)$ -連結である。
4. 任意の $s : \partial\Delta^1 \rightarrow X$ に対し、 $\Omega^{1*}(X, s)$ は $(n-1)$ -連結である。

証明. 各基点 $y_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、単体的集合 $P(X, y_0)$ を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{array}{ccc}
 P(X, y_0) & \longrightarrow & P(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{id \times y_0} & X^{\partial\Delta^1} \cong X \times X
 \end{array}$$

任意の $s : \partial\Delta^1 \rightarrow X$ を $s = x_0 \amalg y_0$ と表せば、次の引き戻し図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(X, s) & \longrightarrow & P(X, y_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^0 & \xrightarrow{x_0} & X
 \end{array}$$

補題 2.1.50 より、 $P(X, y_0) \rightarrow X$ は Kan 束の引き戻しなので Kan 束である。また、 $P(X, y_0)$ は可縮である。実際、 $\Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^1$ を $(i, 0) \mapsto i, (i, 1) \mapsto 1$ で定め、これが導く射 $P(X, y_0) \times \Delta^1 \rightarrow P(X, y_0)$ は id から定値射 y_0 へのホモトピーである。

補題 2.1.63 より 1. \Leftrightarrow 4. が言える。命題 2.1.60 より 2. \Leftrightarrow 3. \Leftrightarrow 4. が言える。□

多重ループ空間

定義 2.1.64. X は単体的集合とし、基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ を固定する。自然数 n に対し、単体的集合 $\Omega^n(X, x_0)$ を次のように帰納的に定める。

$$\begin{aligned}\Omega^0(X, x_0) &= X \\ \Omega^{n+1}(X, x_0) &= \Omega(\Omega^n(X, x_0), x_0)\end{aligned}$$

$\Omega^n(X, x_0)$ のことを、 x_0 を基点とする X の n 重ループ空間と呼ぶ。

系 2.1.64 より、直ちに次を得る。

命題 2.1.65. 自然数 n を固定する。 X が Kan 複体ならば、以下はすべて同値である。

1. X は n -連結である。
2. 少なくとも一つの基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、 $0 \leq m \leq n$ ならば m 重ループ空間 $\Omega^m(X, x_0)$ は連結である。
3. 任意の基点 $x_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ に対し、 $0 \leq m \leq n$ ならば m 重ループ空間 $\Omega^m(X, x_0)$ は連結である。

非輪状 Kan 複体と幾何学的実現

本節の理論を利用すれば、Kan 複体 X の可縮性は幾何学的実現 $|X|$ の可縮性と同値であることが示せる。

補題 2.1.66. X は Kan 複体とする。以下は同値である。

1. X は連結である。
2. X の 1-スケルトン X^1 は連結である。
3. $|X|$ は連結である。
4. $|X^1|$ は連結である。

証明. 1. \Leftrightarrow 2. は連結性の定義より明らか。

1. \Rightarrow 3.

任意の二点 $x, y \in |X|$ をとる。幾何学的実現の定義から、 x と y はそれぞれある単体に含まれる。よって、 x および y はある頂点と道で結ばれる。 X が連結であることから、すべての頂点は道で結ばれるので、結局 x と y は道で結ばれる。すなわち $|X|$ は連結である。

3. \Rightarrow 4.

X の n -スケルトンを X^n と書くと、 X は $X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots \rightarrow X^n$ の超限合成である。幾何学的実現は余極限を保つので、 $|X|$ は $|X^0| \rightarrow |X^1| \rightarrow \cdots \rightarrow |X^n|$ の超限合成である。任意の

二点 $x, y \in |X^1|$ をとり、 $|X|$ 上で x と y を結ぶ道 $p: I \rightarrow |X|$ をとる。 p はある $|X^n|$ への持ち上げ $I \rightarrow |X^n|$ を持つ。 $m \geq 1$ に対して Δ^m を境界で貼り合わせる操作は連結成分の数を変えない。 よって、 $|X^1| \rightarrow |X^n|$ は連結成分の族の間に全単射を導くので、 x と y を結ぶ道 $I \rightarrow |X^1|$ が存在する。 よって $|X^1|$ は連結である。

4. \Rightarrow 2.

任意の二点 $x, y: \Delta^0 \rightarrow X^1$ をとる。 x と y に対応する二点 $x', y': \Delta^0 \rightarrow |X^1|$ を結ぶ道 h をとる。 h が通過する X^1 の頂点を順に $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ とすると、各 x_i と x_{i+1} は (SSet 上の意味で) 道で結ばれる。 よって、 x と y は道で結ばれる。 \square

次の補題も “ホモトピー長完全列” の特殊な場合である。

補題 2.1.67. Top 上の次の可換図式のうち、 f と f' は Serre 束とする。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta} & E' \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\alpha} & B' \end{array}$$

α と β が弱ホモトピー同値ならば、任意の基点 $b \in B$ に対し $\beta|_{f^{-1}(b)}: f^{-1}(b) \rightarrow f'^{-1}(\alpha(b))$ は弱ホモトピー同値である。

証明. 次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。ただし、 $S^{-1} = \emptyset$ とする。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & f^{-1}(b) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \beta \\ D^n & \longrightarrow & f'^{-1}(\alpha(b)) \end{array}$$

$\beta: E \rightarrow E'$ が弱ホモトピー同値であることから、次の図式を斜めに横断する射 γ' が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \gamma' & \downarrow \beta \\ D^n & \longrightarrow & E' \end{array}$$

今、 $f' \circ \beta \circ \gamma'$ は境界 $S^{n-1} \subset D^n$ を固定して一点写像 $\alpha(b)$ とホモトピックである。 α は弱ホモトピー同値だから、 $f \circ \gamma'$ は境界 $S^{n-1} \subset D^n$ を固定して一点 b とホモトピックである。 f は Serre 束だから、 γ' は境界 $S^{n-1} \subset D^n$ を固定したホモトピーによって、像を $f^{-1}(b)$ の中に持つ写像 γ とホモトピックである。 この γ が求める写像である。 \square

補題 2.1.68. X は Kan 複体とする。 $f: X \rightarrow \Delta^0$ に対し以下は同値である。

1. $f \in \text{rlp}(I)$ である。

2. X は可縮である。
3. 任意の n に対し、 X は n -連結である。
4. X および任意の $\Omega^n(X, x_0)$ が連結である。
5. $|X|$ は可縮である。
6. $|X|$ および任意の $\Omega^n(|X|, x_0)$ が連結である。

証明. 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 5. \Rightarrow 6. \Rightarrow 4. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1. を示す。

1. \Rightarrow 2.

命題 2.1.38 より従う。

2. \Rightarrow 5.

幾何学的実現は有限積を保ち、単体を単体に移す。特に一点空間 Δ^0 とのホモトピー同値を保つ。

5. \Rightarrow 6.

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} P(\Omega^{n-1}(|X|, x_0), x_0) & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & & \parallel \\ \Omega^{n-1}(|X|, x_0) & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

縦向きの写像はどちらも Serre 束である。一般に、 $P(\Omega^{n-1}(|X|, x_0), x_0)$ は可縮である。 $n = 1$ のとき、 $\Omega^0(|X|, x_0) = |X|$ は 5. より可縮である。よって補題 2.1.68 より $\Omega^1(|X|, x_0)$ は可縮である。以下、帰納的に $\Omega^m(|X|, x_0)$ は可縮であり、特に連結である。

6. \Rightarrow 4.

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} |P(\Omega^{n-1}(X, x_0), x_0)| & \longrightarrow & P(\Omega^{n-1}(|X|, x_0), x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\Omega^{n-1}(X, x_0)| & \longrightarrow & \Omega^{n-1}(|X|, x_0) \end{array}$$

右の写像は一般に Serre 束であり、左の写像は Kan 束の幾何学的実現なので Serre 束である。一般に、 $|P(\Omega^{n-1}(X, x_0), x_0)|$ および $P(\Omega^{n-1}(|X|, x_0), x_0)$ は可縮である。 $n = 1$ のとき、 $|\Omega^0(X, x_0)| = |X| = \Omega^0(|X|, x_0)$ である。よって補題 2.1.68 より $|\Omega^1(X, x_0)| \rightarrow \Omega^1(|X|, x_0)$ は弱ホモトピー同値である。以下、帰納的に $|\Omega^m(X, x_0)| \rightarrow \Omega^m(|X|, x_0)$ は弱ホモトピー同値である。よって、6. と補題 2.1.67 より X および任意の $\Omega^n(X, x_0)$ は連結である。

4. \Rightarrow 3.

命題 2.1.66 より従う。

3. \Rightarrow 1.

連結性の定義より明らか。

□

ようやく最後の条件が証明できる。

命題 2.1.69. $\text{rlp}(I) \supset \text{rlp}(J) \cap W$ である。

証明. 任意の $f \in \text{rlp}(J) \cap W$ をとる。命題 2.1.42 より、 f が極小 Kan 束の場合のみ示せば十分である。以下、 f は極小 Kan 束とする。

次の図式がリフトを持てばよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

これは、次の図式がリフトを持つことに帰着される。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \Delta^n \times_Y X \\ \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ \Delta^n & \xlongequal{\quad} & \Delta^n \end{array}$$

補題 2.1.45 より、 $\Delta^n \times_Y X \rightarrow \Delta^n$ は自明束 $\Delta^n \times F \rightarrow \Delta^n$ と同型である。よって、上記の図式がリフトを持つことは、次の図式がリフトを持つことに帰着される。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

ここで、次のような引き戻し図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^0 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

特に F は Kan 束である。また、幾何学的実現は引き戻しを保つので、 $|F|$ は可縮である。よって、補題 2.1.69 より $F \rightarrow \Delta^0$ は $\text{rlp}(I)$ に含まれる。すなわち求めるリフトが存在するので、 f は $\text{rlp}(I)$ に含まれる。 \square

2.1.10 モデル圏としての SSet

ここまでの議論により、SSet がモデル圏であることをようやく証明できた。

定理 2.1.70. SSet は余束生成モデル圏であって、 I が余束を、 J が非輪状余束を生成し、 W_{SSet} が弱同値を定める。ただし、 I, J, W_{SSet} は次のように定めている。

$$\begin{aligned} I &= \{\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n\} \\ J &= \{\Lambda_i^n \rightarrow \Delta^n\} \\ W_{\text{SSet}} &= \{f \mid |f| \text{ は弱ホモトピー同値.}\} \end{aligned}$$

本節では、モデル圏の一般論からどのようなことがわかるのかを見ていく。

Top との関係

\mathbf{SSet} と \mathbf{Top} の間には随伴 $|-| \vdash \text{Sing} : \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ が存在する。定理 1.2.23 を用いて \mathbf{Top} 上にモデル圏構造を導きたい。そのためには次を確かめればよい。

- $\text{cell}(|J|) \subset W_{\mathbf{Top}}$ である。
- $|I|$ および $|J|$ は小対象引数を許容する。

ただし、各クラスは次のように定義されている。

$$\begin{aligned} |I| &= \{S^{n-1} \rightarrow D^n\} \\ |J| &= \{D^n \rightarrow D^n \times I\} \\ W_{\mathbf{Top}} &= \{f \mid |\text{Sing}(f)| \text{ は弱ホモトピー同値.}\} \end{aligned}$$

命題 2.1.16 より、 $W_{\mathbf{Top}} = \{f \mid f \text{ は弱ホモトピー同値.}\}$ と書ける。

上記の条件は補題 2.1.23 および命題 2.1.22 より従う。よって、次の定理が示されたことになる。

定理 2.1.71. \mathbf{Top} は余束生成モデル圏であって、 $|I|$ が余束を、 $|J|$ が非輪状余束を生成し、 $W_{\mathbf{Top}}$ が弱同値を定める。

モデル圏の一般論から、例えば次のことを証明してみよう。

命題 2.1.72. 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し、以下はすべて同値である。

1. f は弱ホモトピー同値である。
2. 次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする。ただし、 $S^{-1} = \emptyset$ とする。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

3. $\text{Sing}(f)$ は \mathbf{SSet} 上の弱同値である。
4. $\text{Sing}(f) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$ はホモトピー逆射を持つ。

証明. 1. \Leftrightarrow 3. は $W_{\mathbf{Top}}$ の定義より明らか。

関手 $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SSet}$ は始対象、終対象、および束を保つ。(すなわち、Serre 束を Kan 束に移す。) \mathbf{Top} 上の任意の対象は束対象であり、 \mathbf{SSet} 上の任意の対象は余束対象である。よって、任意の位相空間 X に対して $\text{Sing}(X)$ は束対象かつ余束対象である。よって 3. \Leftrightarrow 4. が従う。

2. \Rightarrow 1. は前に示したので、最後に 1. \Rightarrow 2. を示す。

$f = p \circ i$ なる分解で、 p が非輪状 Serre 束、 i が余束となるものをとる。 f が弱ホモトピー同値ならば、 i は非輪状である。次の図式は持ち上げ γ' を持つ。

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{i \circ \alpha} & \cdot \\ \downarrow & \exists \gamma' \nearrow & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

また、 i は束対象の間の非輪状余束なので、変位レトラクトである。すなわち、 i のホモトピー逆射 g であって、 i の左逆射でもあるものが存在する。 $\gamma = g \circ \gamma'$ とすると、これが求める持ち上げである。□

また、CW 複体に関する次の性質も直ちに証明できる。

命題 2.1.73. X と Y をCW複体とし、 $f: X \rightarrow Y$ は連続写像とする。 f が弱ホモトピー同値であるとき、かつその時に限り、 f はホモトピー同値である。

証明. **Top**上の余束 $A \rightarrow B$ のことを相対セル複体と呼び、特に $A = \emptyset$ のとき B をセル複体と呼ぶのであった。特に、CW複体は**Top**上の余束対象である。**Top**上の任意の対象は束対象でもあるから、CW複体の間の連続写像 f が弱ホモトピー同値であるとき、かつその時に限り、 f はホモトピー逆射をもつ。□

関連図書

- [1] nlab. <https://ncatlab.org>.
- [2] @alg_d. 壹大整域. <http://alg-d.com>.
- [3] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [4] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Number 99. American Mathematical Soc., 2009.
- [5] Daniel G Quillen. The geometric realization of a kan fibration is a serre fibration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 19(6):1499–1500, 1968.
- [6] Agustí Roig. Minimal resolutions and other minimal models. *Publicacions Matemàtiques*, 37(2):285–303, 1993.
- [7] 玉木大. Pantodon web site. <https://pantodon.shinshu-u.ac.jp>.