

# イソトピークラスの安定性

山崎 晃司

平成 29 年 11 月 19 日

## 記号一覧

$\mathbb{R}$  : 実数全体の集合

$\mathbb{R}_{>0}$  : 正の実数全体の集合,  $\mathbb{Z}_{>0}$  : 正の整数全体の集合

$M, N, \dots$  : (第二可算公理を満たす滑らかな) 多様体

$f, g, \dots$  : (滑らかな) 写像

$G_M, G_N \dots$  : リーマン計量

$d_M, d_N \dots$  : 距離関数

$C^r(M, N)$  :  $C^r$ 級写像  $M \rightarrow N$  全体の集合

$Emb^r(M, N)$  :  $C^r$ 級埋め込み  $M \hookrightarrow N$  全体の集合

$Diff^r(M, N)$  :  $C^r$ 級微分同型写像  $M \xrightarrow{\cong} N$  全体の集合

$\mathcal{H}^r(f) \subset C^r(M, N)$  :  $f$  と  $C^r$ 級ホモトピックな写像  $M \rightarrow N$  全体の集合

$\mathcal{I}^r(f) \subset Emb^r(M, N)$  :  $f$  と  $C^r$ 級イソトピックな埋め込み  $M \hookrightarrow N$  全体の集合

$\mathcal{A}^r(f) \subset Diff^r(M, N)$  :  $f$  と  $C^r$ 級アンビエント・イソトピックな同型写像  $M \xrightarrow{\cong} N$  全体の集合

$j_x^r f$  : 点  $x$  における写像  $f$  の  $r$ -jet

$J^r(M, N)$  :  $r$ -jet 空間

$\mathcal{N}_{M,N}^r(U) = \{f \in C^r(M, N) | j^r f(M) \subset U\}$  ( $U \subset J^r(M, N)$  は開集合)

$\xi = (p : E \rightarrow M)$  : (滑らかな) ベクトル束

$\Gamma^r(\xi)$  :  $\xi$  の  $C^r$ 級切断全体の集合

$J^r(\xi) = (J^r p : J^r E \rightarrow M)$  : ベクトル束  $\xi$  の  $r$ -jet 束

$\hat{\mathcal{N}}_\xi^r(f, \epsilon) = \{g \in \Gamma^r(\xi) | d_{J^r E}(j_x^r f, j_x^r g) < \epsilon(x) \forall x \in M\}$

( $f \in \Gamma^r(\xi)$ ,  $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  : 連続関数,  $j_x^r f$  は記号の濫用で、切断の  $jet$  を表す。)

$TM = (\pi_M : TM \rightarrow M)$  :  $M$  の接ベクトル束

$\mathcal{C}^r$  :  $C^r$ 級多様体を対象、 $C^r$ 級写像を射とした圏

$\mathcal{C}^r$  : 圏  $\mathcal{C}^r$  を  $C^r$ 級ホモトピー同値関係によって割った商圏

$Emb^r$  :  $C^r$ 級多様体を対象、 $C^r$ 級埋め込みを射とした圏

$\mathcal{E}^r$  : 圏  $Emb^r$  を  $C^r$ 級イソトピー同値関係によって割った商圏

$Diff^r$  :  $C^r$ 級多様体を対象、 $C^r$ 級微分同型写像を射とした圏

$\mathcal{D}^r$  : 圏  $Diff^r$  を  $C^r$ 級アンビエント・イソトピー同値関係によって割った商圏

次の定理を証明します。

**定理 1.**  $M, N : C^{r+1}$  級多様体および  $f \in C^r(M, N)$  に対して

(i)  $r \geq 0$  の時、ホモトピークラス  $\mathcal{H}^r(f) \subset C^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。

(ii)  $r \geq 1, f \in Emb^r(M, N)$  の時、イソトピークラス  $\mathcal{I}^r(f) \subset Emb^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。

(iii)  $r \geq 1, f \in Diff^r(M, N)$  の時、アンビエント・イソトピークラス  $\mathcal{A}^r(f) \subset Diff^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。□

(i), (ii), (iii) の証明は全く同様で、本質的には測地線を引くことによってホモトピーやイソトピーを実現する。(i) の証明はより簡潔にできるが、面倒なので三つまとめて証明を行う。(ii), (iii) の  $r \geq 1$  という条件は、 $Emb^r(M, N), Diff^r(M, N)$  が開集合になる<sup>1</sup>条件に由来する。

ホイットニー位相や  $jet$  空間および  $jet$  束の定義については既知のものとする。詳しくは参考文献のいずれか (またはすべて) を参照しながら学んでほしい。

$M, N$  が  $C^{r+1}$  級であるという仮定は、接ベクトル束の滑らかさが一つ落ちるところに由来する。しかし、 $r \geq 1$  の場合は本質的ではない。というのも、次の事実<sup>2</sup>が成り立つからである。

**事実 2.**  $r \geq 1$  ならば、任意の  $C^r$  級多様体は (同型を除いて) ただ一つの  $C^\infty$  級多様体と  $C^r$  級微分同型である。□

簡単な応用例を紹介するため、次の事実<sup>3</sup>を認めよう。

**事実 3.**  $0 \leq r < s$  ならば、 $C^s(M, N) \subset C^r(M, N)$  はホイットニー位相について稠密である。□

**系 4.**  $1 \leq r < s$  ならば、忘却関手  $C^s \rightarrow C^r, Emb^s \rightarrow Emb^r, Diff^s \rightarrow Diff^r$  は、圏同値  $\mathcal{C}^s \rightarrow \mathcal{C}^r, \mathcal{E}^s \rightarrow \mathcal{E}^r, \mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^r$  を導く。

また、 $r \geq 0$  の時、忘却関手  $C^r \rightarrow C^0$  が導く  $C^r \rightarrow C^0$  は充満忠実である。□

## 1 ホイットニー位相の基本性質

次の補題の証明は、論理を追うのは難しくないが面倒なので、省略する<sup>4</sup>。

**補題 5.** 位相空間  $A, B, P$  および連続写像  $a : A \rightarrow P, b : B \rightarrow P$  に対し、引き戻し  $A \times_P B$  を考える。いま、ある開集合  $U \subset A \times_P B$  および部分集合  $K_A \subset A, K_B \subset B$  に対し、 $K_A \times_P K_B \subset U$  を満たすと仮定する。この時、 $a|_{K_A}, b|_{K_B}$  が *proper* であれば、次を満たす開集合  $V \subset A, W \subset B$  が存在する。

$K_A \subset V, K_B \subset W, V \times_P W \subset U$  □

<sup>1</sup>[1] の定理 2.1.4, 定理 2.1.7

<sup>2</sup>[1] の定理 2.2.10

<sup>3</sup>[1] の定理 2.2.6

<sup>4</sup>[2] の Lemma 3.7

上の命題は非常によく使う。まずは以下を示してみよう。

**命題 6.**  $(f_0, g_0) \in C^r(M, N) \times C^r(L, M)$  とする。

(i)  $f_{0*} : C^r(L, M) \rightarrow C^r(L, N); g \mapsto f_0 \circ g$  は連続。

(ii)  $g_0$  が *proper* ならば、 $\Phi : C^r(M, N) \times C^r(L, M) \rightarrow C^r(L, N); (f, g) \mapsto f \circ g$  は  $(f_0, g_0)$  において連続である。(実は逆も成り立つ。 $g_0$  が *proper* でないと仮定して、 $\Phi$  が  $(f_0, g_0)$  において連続でないことを示してみよ。)

証明.

$$\begin{array}{ccc} J^r(M, N) \times_M J^r(L, M) & \xrightarrow{\phi} & J^r(L, N) \\ \Psi & & \Psi \\ (j_{g(x)}^r f, j_x^r g) & \longmapsto & j_x^r(f \circ g) \end{array}$$

は連続である。

特に、 $j^r f_{0*} : J^r(L, M) \rightarrow J^r(L, N); j_x^r g \mapsto j_x^r(f_0 \circ g)$  も連続である。

(i)  $\forall U \subset J^r(L, N)$  をとる。

$$g \in f_{0*}^{-1}(\mathcal{N}_{L,N}^r(U))$$

$$\iff j^r(f_0 \circ g)(L) \subset U$$

$$\iff j^r g(L) \subset j^r f_{0*}^{-1}(U)$$

$$\iff g \in \mathcal{N}_{L,M}^r(j^r f_{0*}^{-1}(U))$$

よって、 $\mathcal{N}_{L,M}^r(j^r f_{0*}^{-1}(U)) = f_{0*}^{-1}(\mathcal{N}_{L,N}^r(U))$

(ii)  $\forall U \subset J^r(L, N)$  with  $j^r(f_0 \circ g_0)(L) \subset U$  をとる。 $(\mathcal{N}_{L,N}^r(U)$  は  $f_0 \circ g_0$  の近傍。)

この時、 $j^r f_0(M) \times_M j^r g_0(L) \subset \phi^{-1}(U)$

$g_0$  が *proper* であったとすると命題 5 が使えるので、

$\exists V \subset J^r(M, N), \exists W \subset J^r(L, M)$  : 開集合

$$s.t. j^r f_0(M) \subset V, j^r g_0(L) \subset W, V \times_M W \subset \phi^{-1}(U)$$

この時、 $(f_0, g_0) \in \mathcal{N}_{M,N}^r(V) \times \mathcal{N}_{L,M}^r(W) \subset \Phi^{-1}(\mathcal{N}_{L,N}^r(U))$  □

**命題 7.**  $C^r$  級多様体  $M_1, M_2, N$  および、横断的に交わる二つの  $C^r$  級写像  $h_i : M_i \rightarrow N (i = 1, 2)$  に対し、引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times_N M_2 & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow h_2 \\ M_1 & \xrightarrow{h_1} & N \end{array}$$

を考える。この時、任意の  $C^r$  級多様体  $L$  に対して  $C^r(L, M_1) \times_{C^r(L, N)} C^r(L, M_2)$  と  $C^r(L, M_1 \times_N M_2)$  はホイットニー位相について自然に同相である。

証明.

$$\begin{array}{ccc} C^r(L, M_1 \times_N M_2) & \xrightarrow{p_{1*} \times p_{2*}} & C^r(L, M_1) \times_{C^r(L, N)} C^r(L, M_2) \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & (p_1 \circ t, p_2 \circ t) \end{array}$$

は明らかに全単射であり、命題 6 (i) より連続である。開写像であることを示す。

$\forall U \subset J^r(L, M_1 \times_N M_2)$  をとる。

さらに  $\forall (f, g) = (p_1 \circ t, p_2 \circ t) \in p_{1*} \times p_{2*}(\mathcal{N}_{L, M_1 \times_N M_2}^r(U))$  をとる。

$t \in \mathcal{N}_{L, M_1 \times_N M_2}^r(U)$  より、

$$\begin{array}{ccc}
 J^r(L, M_1 \times_N M_2) & \subset & J^r(L, M_1 \times M_2) \xlongequal{\quad} J^r(L, M_1) \times_L J^r(L, M_2) \\
 \cup & & \cup \\
 U \xlongequal{\quad} & J^r(L, M_1 \times_N M_2) \cap \exists \hat{U} & \subset \quad \exists \hat{U} \\
 \cup & & \cup \\
 j^r t(L) \xlongequal{\quad} & & j^r f(L) \times_L j^r g(L)
 \end{array}$$

(ただし、 $\hat{U} \subset J^r(L, M_1 \times M_2) \cong J^r(L, M_1) \times_L J^r(L, M_2)$  : 開集合)

命題 5 より、 $\exists V \subset J^r(L, M_1), \exists W \subset J^r(L, M_2)$  : 開集合

s.t.  $j^r f(L) \subset V, j^r g(L) \subset W, V \times_L W \subset \hat{U}$

この時、 $(f, g) \in \{C^r(L, M_1) \times_{C^r(L, N)} C^r(L, M_2)\} \cap \{\mathcal{N}_{L, M_1}^r(V) \times \mathcal{N}_{L, M_2}^r(W)\}$   
 $\subset p_{1*} \times p_{2*}(\mathcal{N}_{L, M_1 \times_N M_2}^r(U))$  □

## 2 ベクトル束とリーマン計量

ベクトル束  $\xi = (p : E \rightarrow M)$  の切断の集合  $\Gamma^r(\xi) \subset C^r(M, E)$  について考察する。まず、 $\Gamma^r(\xi)$  は  $\mathbb{R}$  係数のベクトル空間であり、 $C^r(M, \mathbb{R})$  係数の加群でもある。実は、 $\Gamma^r(\xi)$  は  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間として一般には位相ベクトル空間にはならないが、 $C^r(M, \mathbb{R})$ -加群としては位相加群になる。これを見ていこう。

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma^r(\xi) \times \Gamma^r(\xi) & \subset C^r(M, E) \times C^r(M, E) \xlongequal{\quad} C^r(M, E \times E) \\
 \cup & & \cup \\
 (s, t) \mapsto & C^r(M, E \times_M E) \longrightarrow C^r(M, E) \\
 & & \cup \\
 & & s + t \in \Gamma^r(\xi)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C^r(M, \mathbb{R}) \times \Gamma^r(\xi) & \subset C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, E) \xlongequal{\quad} C^r(M, \mathbb{R} \times E) \longrightarrow C^r(M, E) \\
 \cup & & \cup \\
 (a, s) \mapsto & a \cdot s \in \Gamma^r(\xi)
 \end{array}$$

上の図式より、 $C^r(M, \mathbb{R})$ -加群としては位相加群になることはすぐわかる。しかし、 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間としてのスカラー倍写像  $\mathbb{R} \times \Gamma^r(\xi) \rightarrow \Gamma^r(\xi)$  は連続ではない。実際、コンパクト台を持たない切断  $s$  と正の整数  $n$  について、 $\frac{1}{n} \cdot s$  は  $n \rightarrow \infty$  としても 0 に収束しない。これは、ホイットニー位相が一樣収束位相よりも真に強いことによる。

$\mathbb{R}$ -ベクトル空間  $\Gamma^r(\xi)$  は位相ベクトル空間ではないので、当然フレシェ空間などの”よい”空間ではなく扱いづらい。しかしながら、これは”局所凸”ではある。

**補題 8.**  $C^r$  級ベクトル束  $\xi = (p : E \rightarrow M)$  および  $M$  上のリーマン計量  $G_M$  に対し、 $E$  上のリーマン計量  $G_E$  で次を満たすものが存在する。

ある自明化  $\text{Atlas}\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  をとって、 $\forall h_\alpha$  が等長同型かつ随伴する変換関数が直交群に値を持つようにできる。

**証明.** 随伴する変換関数が直交群に値を持つように自明化  $\text{Atlas}\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  をとる。

あとは、 $h_\alpha$  によって  $p^{-1}(U_\alpha)$  上にリーマン計量を導けば、これは上手く貼り合う。□

**命題 9.**  $\Gamma^r(\xi) \subset C^r(M, E)$  にホイットニー位相を入れたとき、ゼロ切断  $0 \in \Gamma^r(\xi)$  の近傍  $U$  であって、次を満たすものが存在する。

$$\forall U \in U, \forall s_1, s_2 \in U, \forall t \in [0, 1] \text{ に対し、 } (1-t)s_1 + ts_2 \in U$$

**証明.**  $M$  上のリーマン計量の一つ固定する。 $jet$  束  $J^r(\xi) = (J^r p : J^r E \rightarrow M)$  は  $M$  上のベクトル束だから、補題 8 の条件を満たす  $J^r E$  上のリーマン計量がとれる。さらにこれは  $J^r E$  上の距離を導く。 $U \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{N}_\xi^r(0, \epsilon) | \epsilon \in C^0(M, \mathbb{R})\}$  とする。 $\forall s_1, s_2 \in U, \forall t \in [0, 1], \forall x \in M$  に対し、 $j_x^r\{(1-t)s_1 + ts_2\} = (1-t)j_x^r s_1 + tj_x^r s_2$  より  $U$  は条件を満たす。□

### 3 主定理の証明

**定理 10 (定理 1).**  $M, N : C^{r+1}$  級多様体および  $f \in C^r(M, N)$  に対して

(i)  $r \geq 0$  の時、ホモトピークラス  $\mathcal{H}^r(f) \subset C^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。

(ii)  $r \geq 1, f \in \text{Emb}^r(M, N)$  の時、イソトピークラス  $\mathcal{I}^r(f) \subset \text{Emb}^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。

(iii)  $r \geq 1, f \in \text{Diff}^r(M, N)$  の時、アンビエント・イソトピークラス  $\mathcal{A}^r(f) \subset \text{Diff}^r(M, N)$  はホイットニー位相について開集合である。

**証明.** ホモトピック、イソトピック、アンビエント・イソトピックの関係は同値関係であり、特に推移律を満たす。よって、次の主張を示せばよいことになる。

**主張**  $f$  の近傍  $\mathcal{N}$  で、 $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}^r(f), \mathcal{I}^r(f), \mathcal{A}^r(f)$  を満たすものが存在する。

$N$  上のリーマン計量の一つ固定して、指数写像  $\exp_y : T_y N \dashrightarrow N$  を考える。<sup>5</sup>これを用いて、 $\text{Exp} : TN \dashrightarrow N \times N; v \mapsto (\pi_M(v), \exp_{\pi_M(v)}(v))$  を定義する。 $\text{Exp}$  は実際には 0 切断の像の近傍  $W \subset TN$  から対角線集合  $\Delta \subset N \times N$  の近傍  $V \subset N \times N$  への  $C^r$  級微分同型写像  $\text{Exp} : W \xrightarrow{\cong} V$  である。これにより、下図を考えることができる。

$$\begin{array}{ccccc}
 C^r(M, N) \times C^r(M, N) & \cong & C^r(M, N \times N) & & C^r(M, TN) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C^r(M, V) & \cong & C^r(M, V) & \xleftarrow[\cong]{\text{Exp}^*} & C^r(M, W) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} & \xrightarrow{\cong} & \Gamma^r(f^*TN) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 \{f\} \times \mathcal{N}_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Q} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

<sup>5</sup>[5]

ただし、 $\mathcal{N}_1$  は  $(f, f) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1 \subset C^r(M, V)$  なる開集合、 $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{g} \in C^r(M, TN) \mid \pi_M \circ \hat{g} = f\}$  で、 $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$  は対応する  $\{f\} \times \mathcal{N}_1$  の像である。 $\mathcal{P} \cong \Gamma^r(f^*TN)$  なる同型は命題7より従う。

命題9より  $S \subset \Gamma^r(f^*TN)$  を凸集合としてよい。

(i) の場合は  $\mathcal{N}_1$  をそのまま  $\mathcal{N}$  とする。この時、 $\forall s \in S, t \in [0, 1]$  に対して  $s_t \stackrel{\text{def}}{=} t \cdot s$  とすればホモトピーが構成できる。(ii), (iii) の場合は、さらに  $\mathcal{N}_1 \subset Emb^r(M, N), Diff^r(M, N)$  としてとりなおす必要がある。

(iii) はこれで十分だが、(ii) についてはより微妙な問題がある。ホモトピーが  $t \in [0, 1]$  を止めるごとに埋め込みであったとしても、 $M \times [0, 1] \rightarrow N \times [0, 1]$  が埋め込みであるとは限らない。これは、*proper* かつ上に有界な  $\epsilon \in C^0(M, \mathbb{R}_{>0})$ <sup>6</sup> に対して  $\mathcal{N}_1 \subset \{g \in C^r(M, N) \mid d_N(f(x), g(x)) < \epsilon(x) \forall x \in M\}$  となるように  $\mathcal{N}_1$  をとりなおせば解決できる。

□

## 参考文献

- [1] M. W. ハーシュ [著] and 松本堯生 [訳], "微分トポロジー," シュプリンガー数学クラシックス 第25巻
- [2] M. Golubitsky and V. Guillemin, "Stable Mappings and Their Singularities," Springer Graduate Texts in Mathematics Volume 14 (1973)
- [3] P. W. Michor, "Manifolds of Differentiable Mappings,"  
[http://www.mat.univie.ac.at/~michor/manifolds\\_of\\_differentiable\\_mappings.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~michor/manifolds_of_differentiable_mappings.pdf)
- [4] D. J. Saunders, "The Geometry of Jet Bundles," Cambridge University Press, 1989
- [5] 酒井隆, "リーマン幾何学," 裳華房 数学選書 11

---

<sup>6</sup>このような  $\epsilon$  は次のようにとれる。 $M$  の相対コンパクトかつ局所有限な可算開被覆および従属する1の分割  $\{\lambda_n\}_n$  をとる。そこで、 $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{n} \cdot \lambda_n$  とすればよい。