ホモトピー原理 (h-principle)

山崎 晃司　東京工業大学

2020 年 7 月 15 日

記号一覧

Set:集合と写像の圏
Top:位相空間と連続写像の圏
$\mathscr{CH}$:コンパクトハウスドルフ空間と連続写像の圏
$\mathscr{PCH}$:局所コンパクトかつパラコンパクトなハウスドルフ空間と連続写像の圏
Mfd:滑らかな多様体と滑らかな写像の圏
$Sh(\mathscr{U}) = Sh(\mathscr{U};\mathbf{Set})$:（集合を値に持つ）$\mathscr{U}$ 上の層と自然変換の圏
$Sh(\mathscr{U};\mathscr{C})$:$\mathscr{C}$ に値を持つ $\mathscr{U}$ 上の層と自然変換の圏
$CPSh(\mathscr{U})$:$\mathscr{U}$ 上の具体前層と自然変換の圏
$CSh(\mathscr{U})$:$\mathscr{U}$ 上の具体層と自然変換の圏
qTop:擬位相空間と擬連続写像の圏
vTop:仮想的位相空間と仮想的連続写像の圏
hTop:ホモトピー的対象とホモトピー的射の圏
$\mathscr{U}_U$:$\mathscr{U}$ の U 上のスライス圏
$Nat(-,-)$:自然変換の集合

目 次

第0章　導入

Gromov の “Partial Differential Relations”[3] を読んで勉強したことをまとめる予定です。部分的に [2] などを参考にする予定です。

第1章　一般化された位相空間とホモトピー

ホモトピー原理の基本的な考え方は次のようなものである。何らかの微分方程式または微分不等式の解を得るため、まずはその “形式的な” 解を用意する。そのあとで、実はそれがホモトピーによって厳密解へと変形できることを示すのである。そのため、写像空間に上手く “位相” を入れて “ホモトピー論” を展開したい。写像空間への位相の入れ方は、たとえばコンパクト開位相などが知られているが、この取り扱いは非常に繊細で、適用できる状況は多くない。そこで、厳密な意味での “位相” を入れることは諦めて、十分都合のいい “連続写像” のクラスを与えるという方法で、位相空間の概念を拡張する。

1.1　グロタンディーク位相と景

まずはグロタンディーク位相と景について復習しておく。トポスなどは扱わない。詳しく知りたい方は [5] などを読むとよいかもしれない。

定義 1.1.1. $\mathscr{U}$ は圏とする。$\mathscr{U}$ 上のグロタンディーク位相 *(Grothendieck topology)* とは、各 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、射の族からなる集合 $\mathcal{T}_U$ を与える写像であって、次の公理を満たすものである。

1. $\phi \in \mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ ならば、$cod(\phi) = U$ である。
2. $\phi : V \to U$ が同型射ならば、$\{\phi\} \in \mathcal{T}_U$ である。
3. $\{V_i \to U\}_i \in \mathcal{T}_U$ ならば、$\mathscr{U}$ 上の各射 $W \to U$ に対し、ファイバー積 $V_i \times_U W$ が存在して $\{V_i \times_U W \to W\}_i \in \mathcal{T}_W$ を満たす。
4. $\{V_i \to U\}_i \in \mathcal{T}_U$ かつ $\{W_{ij} \to V_i\}_j \in \mathcal{T}_{V_i}$ ならば、$\{W_{ij} \to V_i \to U\}_{i,j} \in \mathcal{T}_U$ である。

この時、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ を U の被覆 *(covering)* と呼ぶ。グロタンディーク位相を備えた圏のことを景 *(site)* と呼ぶ。

注意 1.1.2. 景と言ったときには有限完備性を仮定することが多い。しかし、後で使いたいいくつかの例は有限完備でない。

例 1.1.3. ある位相空間の開集合系を $\mathscr{U}_{top}$ とすると、これは包含関係を射として圏となる。ここに、普通の意味での開被覆を被覆として定義すればグロタンディーク位相が定まり、$\mathscr{U}_{top}$ は景となる。

例 1.1.4. **Set** は、集合と写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Set})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathbf{Set}\text{ 上の射の族 }\{f_i : A_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\coprod f_i : \coprod A_i \to X\text{ は全射である。}\end{aligned}$$

とすることにより、**Set** 上に景の構造が定まる。

例 1.1.5. **Top** は、位相空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Top})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathbf{Top}\text{ 上の射の族 }\{f_i : U_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\text{各 }f_i\text{は開埋め込みで、}\coprod f_i : \coprod F_i \to X\text{ は全射である。}\end{aligned}$$

とすることにより、**Top** 上に景の構造が定まる。
　または、各 $X \in Ob(\mathbf{Top})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathbf{Top}\text{ 上の射の族 }\{f_i : F_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\text{各 }f_i\text{は閉埋め込み、}I\text{ は有限で、}\coprod f_i : \coprod F_i \to X\text{ は全射である。}\end{aligned}$$

とすることにより、**Top** 上に別の景の構造が定まる。

例 1.1.6. $\mathscr{CH}$ は、コンパクトハウスドルフ空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathscr{CH})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathscr{CH}\text{ 上の射の族 }\{f_i : A_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&I\text{ は有限で、}\coprod f_i : \coprod A_i \to X\text{ は全射である。}\end{aligned}$$

とすることにより、$\mathscr{CH}$ 上に景の構造が定まる。

例 1.1.7. $\mathscr{PCH}$ は、局所コンパクトかつパラコンパクトなハウスドルフ空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathscr{PCH})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathscr{PCH}\text{ 上の射の族 }\{f_i : A_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\text{各 }A_i\text{はコンパクトで、}\{Im(f_i)\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の局所有限被覆である。}\end{aligned}$$

とすることにより、$\mathscr{PCH}$ 上に景の構造が定まる。

例 1.1.8. **Mfd** は、滑らかな多様体と滑らかな写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Mfd})$ に対し

$$\begin{aligned}&\mathbf{Mfd}\text{ 上の射の族 }\{f_i : U_i \to X\}_{i\in I}\text{が }X\text{ の被覆である。}\\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\text{各 }f_i\text{は開埋め込みで、}\coprod f_i : \coprod U_i \to X\text{ は全射である。}\end{aligned}$$

とすることにより、**Mfd** 上に景の構造が定まる。

例 1.1.9. $\mathscr{U}$ は景とする。各 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、U 上のスライス圏を $\mathscr{U}_U$ とする。すなわち、次のように対象と射を定義する。$\mathscr{U}_U$ の対象は $\mathscr{U}$ 上の射 $V \to U$ である。$\mathscr{U}_U$ の射 $(V \to U) \to (W \to U)$ は $\mathscr{U}$ 上の射 $V \to W$ であり、次の図式を可換とするものである。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr] & W \arrow[d] \\ & U \end{tikzcd}$$

各 $V \in Ob(\mathscr{U}_U)$ に対し、

$$\begin{aligned} &\mathscr{U}_U\text{上の射の族 } \{V_i \to V\}_{i\in I}\text{が } V \text{ の被覆である。} \\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}&\{V_i \to V\}_{i\in I}\text{は } \mathscr{U} \text{ 上の被覆である。} \end{aligned}$$

とすることにより、$\mathscr{U}_U$ 上に景の構造が定まる。

1.2 景上の層

1.2.1 層

定義 1.2.1. $\mathscr{U}$ は景とする。（集合を値に持つ）$\mathscr{U}$ 上の前層 *(presheaf)* とは、反変関手 $\mathscr{U}^{op} \to \mathbf{Set}$ のことである。

（集合を値に持つ）$\mathscr{U}$ 上の層 *(sheaf)* とは、$\mathscr{U}$ 上の前層 $\mathcal{F} : \mathscr{U}^{op} \to \mathbf{Set}$ であって、次の張り合わせ条件を満たすものである。

$\{U_i \to U\}_i$ が被覆ならば、次の図式は差核 *(equalizer)* である。

$$\mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

景 $\mathscr{U}$ に対し、$\mathscr{U}$ 上の層と自然変換の圏を $Sh(\mathscr{U})$ と書く。

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathscr{U}$ 上の前層とする。各 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \overset{\text{def}}{=} Nat(\mathcal{F}|_{\mathscr{U}_U}, \mathcal{G}|_{\mathscr{U}_U})$ とする。ただし、$Nat(-,-)$ は自然変換全体からなる集合である。これにより、前層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が定まる。

命題 1.2.2. $\mathcal{G}$ が層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も層である。

証明. 次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \to \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i) \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i \times_U U_j)$$

$(f_i) \in \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i)$ について、$r_1((f_i)) = r_2((f_i))$ を仮定する。任意の ${}^{\forall}V = (V \to U) \in Ob(\mathscr{U}_U)$ をとり、$V_i \overset{\text{def}}{=} V \times_U U_i$ とする。この時、次の図式を可換にするただ一つの射

$f_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_V"'] & \prod \mathcal{F}(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\prod f_{i,V_i}"] & \prod \mathcal{F}(V_i \times_V V_j) \arrow[d, "\prod f_{i,V_i \times_V V_j}"] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \prod \mathcal{G}(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{G}(V_i \times_V V_j) \end{tikzcd}$$

これにより、ただ一つの自然変換 $f \in \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ が定まる。 □

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を $\mathscr{U}$ 上の前層とする。各自然変換 $f : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ に対し、$\hat{f} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ を次のように定義する。

各 $U \in Ob(\mathscr{U})$, $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し、$g = \hat{f}_U(s) : \mathcal{G}|_{\mathscr{U}_U} \to \mathcal{H}|_{\mathscr{U}_U}$ を定義したい。これを、各 $V \in Ob(\mathscr{U}_U)$, $t \in \mathcal{G}(V)$ に対し、$g_V(t) \overset{\mathrm{def}}{=} f(r_{V\to U}(s), t)$ によって定義する。

命題 1.2.3. $f \mapsto \hat{f}$ なる対応により、$Nat(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong Nat(\mathcal{F}, \mathcal{H}^{\mathcal{G}})$ である。

証明. 逆の対応を作ればよい。これは、各自然変換 $\hat{f} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ に対して、$f_U(s,t) \overset{\mathrm{def}}{=} (\hat{f}_U(s))_U(t)$ とすれば作れる。 □

注意 1.2.4. 層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が **Set** に値を持つためには、景 $\mathscr{U}$ が小さい景である必要がある。(“小さい”とは、グロタンディーク宇宙に含まれるということ。)景 $\mathscr{U}$ が大きい景の場合、グロタンディーク宇宙を少なくとも二つ取ることで、$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ は **Set** に値を持つと見なせる。

1.2.2　プラス構成と層化

景上でも前層の層化を考えることができる。ここでは一般の圏 $\mathscr{C}$ に値を持つ層と前層について考察したい。$\mathscr{C}$ に値を持つ $\mathscr{U}$ 上の層と自然変換の圏を $Sh(\mathscr{U};\mathscr{C})$ と書くことにする。特に、$Sh(\mathscr{U}) = Sh(\mathscr{U};\mathbf{Set})$ である。

定義 1.2.5. 圏 $\mathscr{C}$ が帰納極限-積交換性質または *IPC* 性質 *(inductive-limit-product commutation property)* を満たすとは、任意の余フィルター図式の族 $\{\alpha_s : I_s \to \mathscr{C}\}_s$ に対し、カノニカルな射 $\varinjlim(\prod I_s \overset{(i_s)\mapsto\prod\alpha_s(i_s)}{\longrightarrow} \mathscr{C}) \to \prod(\varinjlim \alpha_s)$ が同型射となることである。

以下、圏 $\mathscr{C}$ は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。その上で、前層及び層は圏 $\mathscr{C}$ を値に持つとする。

定義 1.2.6. 景 $\mathscr{U}$ 上の前層 $\mathcal{F} : \mathscr{U}^{op} \to \mathscr{C}$ が分離的 *(separated)* であるとは、$\{U_i \to U\}_i$ が被覆ならば $\mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i)$ は単射となることである。

これから、前層の “拡張” を定義し、“拡張” を二重に取ったものが層化となることを示す。

まず、$\mathscr{U}$ 上の被覆の圏 $Cov_{\mathscr{U}}$ を定義する。対象はもちろん $\mathscr{U}$ 上の被覆であり、二つの被覆 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$, $\{V_j \to V\}_{j\in J}$ の間の射 $f : \{U_i \to U\}_{i\in I} \to \{V_j \to V\}_{j\in J}$ とは、添え

字の写像 $\tau : I \to J$ と $\mathscr{U}$ 上の射の族 $f_i : U_i \to V_{\tau(i)}$ および $f' : U \to V$ の組で、次の図式を可換とするものである。

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & U \arrow[d, "f'"] \\ V_{\tau(i)} \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

すると、忘却関手 $\mathcal{P} : Cov_{\mathscr{U}} \to \mathscr{U}$ が $\mathcal{P}(\{U_i \to U\}_i) \overset{\mathrm{def}}{=} U$ として定まる。これにより、各対象 $U \in Ob(\mathscr{U})$ の被覆の圏 $Cov(U) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}^{-1}(U)$ が定まる。$\mathscr{U}$ 上の射 $f : V \to U$ が存在した時、制限関手 $f^* : Cov(U) \to Cov(V)$ が $f^*(\{U_i \to U\}_i) \overset{\mathrm{def}}{=} (\{U_i \times_U V \to V\}_i)$ によって定まる。

$Cov(U)$ 上で射 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \to \{V_j \to U\}_{j \in J}$ が存在するとき、$\{U_i \to U\}_{i \in I}$ は $\{V_j \to U\}_{j \in J}$ の細分 (refinement) であるという。

$\mathcal{F}$ は $\mathscr{U}$ 上の前層とする。$\mathscr{U}$ 上の前層 $\mathcal{F}^+$ を次のように定義する。

自己関手 $\mathcal{R} : Cov_{\mathscr{U}} \to Cov_{\mathscr{U}}$ を $\mathcal{R}(\{U_i \to U\}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{U_i \times_U U_j \to U\}$ によって定める。この時、二つの標準的な自然変換 $\mathcal{R} \rightrightarrows Id$ が取れる。反変関手 $P^n = P^n_{\mathcal{F}} : Cov^{op}_{\mathscr{U}} \to \mathscr{C}$ を $P^1(\{U_i\}) \overset{\mathrm{def}}{=} \prod \mathcal{F}(U_i)$, $P^{n+1} \overset{\mathrm{def}}{=} P^n \circ \mathcal{R}$ によって定める。これを用いて、$K = K_{\mathcal{F}}$ を、図式 $P^1 \rightrightarrows P^2$ の差核として定める。そこで、$\mathcal{F}^+(U) \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim K|_{Cov(U)}$ とする。これはすなわち、$Cov(U)$ で細分をとり続けた極限である。

さらにこの時、標準的な射 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ が、自然な射 $\mathcal{F}(U) \to K_U(\{U \overset{id}{\to} U\}) \to \mathcal{F}^+(U)$ より導かれる。

このような構成をプラス構成 (plus construction) という。

命題 1.2.7. $\mathcal{F}^+$ は分離的である。

証明. $\{U_i \to U\}_i$ を被覆とする。$\mathcal{F}^+(U) \to \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ が単射であればよい。

$\prod Cov(U_i) \to Cov(U)$ は共終である。よって、$\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K|_{\prod Cov(U_i)}$ が成り立つ。$^\forall(\{V_{ij} \to U_i\}) \in Ob(\prod Cov(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} K(\{V_{ij} \to U\}) \arrow[r] \arrow[d] & P^1(\{V_{ij} \to U\}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & P^2(\{V_{ij} \to U\}) \arrow[d] \\ \prod K(\{V_{ij} \to U_i\}) \arrow[r] & \prod P^1(\{V_{ij} \to U_i\}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod P^2(\{V_{ij} \to U_i\}) \end{tikzcd}$$

図式の順極限をとると、IPC 性質と差核とフィルター余極限が交換することから、$\mathcal{F}^+(U) \to \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ は単射である。 □

命題 1.2.8. $\mathcal{F}$ は分離的であると仮定すると、$\mathcal{F}^+$ は層である。

証明. $\{U_i \to U\}_i$ を被覆とする。次の図式が差核であることを示せばよい。

$$\mathcal{F}^+(U) \to \prod \mathcal{F}^+(U_i) \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} \prod \mathcal{F}^+(U_i \times_U U_j)$$

${}^{\forall}(\{V_{ik} \to U_i\}) \in Ob(\prod Cov(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\prod P^2(\{V_{ik} \to U_i\}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U_i \times_U U_j\}) & P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U\}) \arrow[l, "\text{単射}"'] \\
\prod P^1(\{V_{ik} \to U_i\}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & \prod P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U_i \times_U U_j\}) \arrow[r, equal] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U\}) \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \\
\prod K(\{V_{ik} \to U_i\}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u] & \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U_i \times_U U_j\}) \arrow[u] & K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U\}) \arrow[l, "\text{単射}"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ が分離的であることから、図式の右上の射が単射である。図式 $\prod K(\{V_{ik} \to U_i\}) \rightrightarrows \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U_i \times_U U_j\})$ の差核を $K'((\{V_{ik} \to U_i\}))$ とすると、図式追跡により $K'((\{V_{ik} \to U_i\})) \to K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \to U\})$ が導かれる。また、$K(\{V_{ik} \to U\}) \to K'((\{V_{ik} \to U_i\}))$ であることも容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K'|_{\prod Cov(U_i)}$ である。すなわち、初めの図式は差核である。 □

命題 1.2.9. 任意の前層 $\mathcal{F}$ と層 $\mathcal{G}$ および射 $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\mu"] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\mu^+"] \\
 & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

証明. 各対象 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、$\mu^+_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ を次のように定める。

${}^{\forall}(\{U_i \to U\}) \in Ob(Cov(U))$ について、次の図式を可換にする $\mu'_{\{U_i \to U\}}$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd}
K(\{U_i \to U\}) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\mu'_{\{U_i \to U\}}"'] & \prod \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\prod \mu_{U_i}"] & \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \arrow[d, "\prod \mu_{U_i \times_U U_j}"] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod \mathcal{G}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{G}(U_i \times_U U_j)
\end{tikzcd}$$

これらは、ただ一つの $\mu^+_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ を導く。 □

系 1.2.10. 任意の前層 $\mathcal{F}$ に対し、$\mathcal{F}^{++}$ は層である。

さらに、別の層 $\mathcal{G}$ と射 $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^{++} : \mathcal{F}^{++} \to \mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\nu^2"] \arrow[dr, "\mu"] & \mathcal{F}^{++} \arrow[d, "\mu^{++}"] \\
 & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

定理 1.2.11. 反映的部分圏 $Sh(\mathscr{U}) \subset \mathbf{Set}^{\mathscr{U}^{op}}$ の包含関手は任意の極限を創出し、$Sh(\mathscr{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

証明. 前層が層であるための条件は、次の形の図式が差核となることである。

$$\mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

任意の極限は極限と可換なので、特に差核および積とも可換である。よって、包含関手は任意の極限を創出する。よって $Sh(\mathscr{U})$ は完備であり、反映的であることから余完備である。また、冪対象を持つことからデカルト閉圏である。 □

1.3　具体景と具体層

1.3.1　具体景と具体層

定義 1.3.1. 景 $\mathscr{U}$ が具体景 *(concrete site)* であるとは、$\mathscr{U}$ が終対象 $*$ を持ち、次の条件を満たすことである。

1. 共変関手 $Hom_{\mathscr{U}}(*, -) : \mathscr{U} \to \mathbf{Set}$ は忠実である。
2. $\{U_i \to U\}_i$ が被覆ならば、$\coprod Hom_{\mathscr{U}}(*, U_i) \to Hom_{\mathscr{U}}(*, U)$ は全射である。

$\mathscr{U}$ は具体景とする。各 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、$\tilde{U} \overset{\text{def}}{=} Hom_{\mathscr{U}}(*, U)$ を U の基底集合 (base set) と呼ぶ。$\mathscr{U}$ 上の各射 $f : U \to V$ に対し、$\tilde{f} \overset{\text{def}}{=} Hom_{\mathscr{U}}(*, f) : \tilde{U} \to \tilde{V}$ を f の基底写像 (base map) と呼ぶ。これらを踏まえ、共変関手 $Hom_{\mathscr{U}}(*, -) : \mathscr{U} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手と呼ぶ。

具体景の定義の一つ目の条件は、忘却関手が忠実であるということである。よって、$\mathscr{U}$ 上の射の一致を見るためには、その基底写像が一致することを確かめればよい。

二つ目の条件は、忘却関手が $\mathscr{U}$ 上の被覆を $\mathbf{Set}$ 上の被覆へ移すということである。これにより、$\mathbf{Set}$ 上の任意の層は忘却関手により $\mathscr{U}$ 上の層へと引き戻される。

例 1.3.2. $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Set}$, $\mathscr{CH}$, $\mathscr{PCH}$, $\mathbf{Mfd}$ はすべて具体景である。

$\mathscr{U}$ は具体景とし、$\mathcal{F}$ は $\mathscr{U}$ 上の前層とする。この時、各 $x \in \tilde{U} = Hom_{\mathscr{U}}(*, U)$ に対し、制限写像 $r_x : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(*)$ が定まる。そこで、$\tilde{\mathcal{F}}_U : \mathcal{F}(U) \to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*))$ を、$\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) \overset{\text{def}}{=} r_x(s)$ によって定義する。

定義 1.3.3. $\mathscr{U}$ は具体景とし、$\mathcal{F}$ は $\mathscr{U}$ 上の前層とする。

$\mathcal{F}$ が具体前層 *(concrete presheaf)* であるとは、各 $U \in Ob(\mathscr{U})$ に対し、$\tilde{\mathcal{F}}_U$ が単射となることである。

具体前層が層でもある時、これを具体層 *(concrete sheaf)* と呼ぶ。

$\mathcal{F}$ は $\mathscr{U}$ 上の具体前層とする。$X \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(*)$ を $\mathcal{F}$ の基底集合と呼ぶ。このとき、$\mathcal{F}$ は自然な埋め込み $\tilde{\mathcal{F}}$ によって、$\mathscr{U}$ 上の層 $Hom_{\mathbf{Set}}(-, X)$ の部分前層とみなせる。そこで、具体前層を集合 X と層 $Hom_{\mathbf{Set}}(-, X)$ の部分前層 $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}$ の組 $(X, \mathcal{F}_X)$ であって、$\tilde{\mathcal{F}}_* : \mathcal{F}(*) \to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{*}, \mathcal{F}(*))$ が同型となるものとして定義することもできる。さらに、具体

前層の間の自然変換 $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ に対し、$\tilde{f} = f(*) : X \to Y$ を f の基底写像と呼ぶ。次の図式により、自然変換の一致を見るためには、その基底写像が一致することを確かめればよい。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathcal{G} \arrow[d, hook] \\ Hom_{\mathbf{Set}}(-, X) \arrow[r, "\tilde{f}_*"'] & Hom_{\mathbf{Set}}(-, Y) \end{tikzcd}$$

さらに、$X \in Ob(\mathscr{U})$ と前層 $\mathcal{F}$ について、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} Nat(Hom_{\mathscr{U}}(-, U), \mathcal{F}) \arrow[r, "f \mapsto f(*)"] \arrow[d, "\text{米田同型:} f \mapsto f_U(id_U)"', "\cong"] & Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*)) \\ \mathcal{F}(U) \arrow[ur, "\tilde{\mathcal{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

すなわち、各自然変換 $f : Hom_{\mathscr{U}}(-, U) \to \mathcal{F}$ をある切断 $f \in \mathcal{F}(U)$ と同一視した時、これらは同じ基底写像を持つ。

例 1.3.4. **Top**, **Set**, $\mathscr{CH}$, $\mathscr{PCH}$, **Mfd** 上の Hom 関手はすべて具体層である。もう少し具体的に見てみよう。

$\mathscr{U}$ は **Top**, **Set**, $\mathscr{CH}$, $\mathscr{PCH}$, **Mfd** のいずれかとし、$X \in Ob(\mathscr{U})$ をとる。この時、$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} Hom_{\mathscr{U}}(-, X)$ は具体層である。この時、各 $U \in Ob(\mathscr{U})$, $x \in \tilde{U} = Hom_{\mathscr{U}}(*, U)$, $s \in \mathcal{F}(U) = Hom_{\mathscr{U}}(U, X)$ に対し、$\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) = r_x(s) = s \circ x : * \to X$ である。今、各 $x \in \tilde{U}$ を $x(*) \in U$ と同一視する。すなわち、具体圏に対して定義される忘却関手を先験的に存在する忘却関手と同一視するのである。これにより、$\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) = s(x) \in X$ と書ける。すなわち、このような同一視の下で、$\tilde{\mathcal{F}}_U : Hom_{\mathscr{U}}(U, X) \to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \tilde{X})$ は忘却関手が定める埋め込みである。

具体景 $\mathscr{U}$ に対し、$\mathscr{U}$ 上の具体前層と自然変換の圏を $CPSh(\mathscr{U})$ と書き、$\mathscr{U}$ 上の具体層と自然変換の圏を $CSh(\mathscr{U})$ と書く。

定理 1.3.5. $\mathscr{U}$ は **Top**, $\mathscr{CH}$, $\mathscr{PCH}$, **Mfd** のいずれかとする。この時、関手 $\mathscr{U} \to CSh(\mathscr{U}); X \mapsto Hom_{\mathscr{U}}(-, X)$ は充満忠実である。

証明. 米田の補題のよく知られた応用である。 □

前層の層化を考えたように、前層の具体化を考えることもできる。

命題 1.3.6 ([1]). $\mathscr{U}$ は具体景とし、$\mathcal{F}$ は前層とする。$\mathcal{F}^{con} \overset{\text{def}}{=} Im[\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to Hom_{\mathbf{Set}}(-, \mathcal{F}(*))]$ は具体前層である。

さらに、別の具体前層 $\mathcal{G}$ と射 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\tilde{f}:\mathcal{F}^{con}\to\mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}^{con} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}
$$

証明. $\mathcal{F}^{con}$ は明らかに具体前層である。普遍性は次の図式より明らか。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}^{con} \arrow[r, hook] \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] & Hom_{\mathbf{Set}}(-,\mathcal{F}(*)) \arrow[d] \\
\mathcal{G} \arrow[rr, hook] & & Hom_{\mathbf{Set}}(-,\mathcal{G}(*))
\end{tikzcd}
$$

□

命題 1.3.7. $\mathcal{G}$ が具体前層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も具体前層である。

証明. $Hom \overset{\text{def}}{=} \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(*) = Hom_{CSh(\mathscr{U})}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ とする。$\tilde{\mathcal{G}^{\mathcal{F}}}_U:\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)\to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U},Hom)$ が単射であればよい。

$f,g\in\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ に対し、$\tilde{\mathcal{G}^{\mathcal{F}}}_U(f)=\tilde{\mathcal{G}^{\mathcal{F}}}_U(g)$ と仮定する。$f=g$ を示すためには、任意の $^\forall V\in Ob(\mathscr{U}_U)$, $^\forall s\in\mathcal{F}(V)$ に対し、$f_{V\to U}(s)=g_{V\to U}(s)$ であることを示せばよい。$s_f\overset{\text{def}}{=}f(s)$, $s_g\overset{\text{def}}{=}g(s)$ とすると、$\mathcal{G}$ が具体前層であることから、$s_f=s_g$ を示すためには任意の $^\forall x\in\tilde{V}$ に対して $r_x(s_f)=r_x(s_g)$ であることを示せばよい。

今、$\tilde{\mathcal{G}^{\mathcal{F}}}_U(f)=\tilde{\mathcal{G}^{\mathcal{F}}}_U(g)$ より、任意の $^\forall x\in\tilde{V}\to\tilde{U}$ に対して $f_x=g_x$ である。よって、$r_x(s_f)=f_x(r_x(s))=g_x(r_x(s))=r_x(s_g)$ である。

$$
\begin{tikzcd}
U & & & & & & \\
V \arrow[u] & s \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_{V\to U},g_{V\to U}"] \arrow[d, "r_x"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "r_x"] & \ni & s_f,s_g \arrow[d, mapsto] \\
* \arrow[u, "x"] & r_x(s) & \in & \mathcal{F}(*) \arrow[r, "f_x=g_x"] & \mathcal{G}(*) & \ni & r_x(s_f)=r_x(s_g)
\end{tikzcd}
$$

□

定理 1.3.8. 反映的部分圏 $CPSh(\mathscr{U})\subset\mathbf{Set}^{\mathscr{U}^{op}}$ の包含関手は任意の極限を創出し、$CPSh(\mathscr{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

証明. 前層が具体前層であるための条件は、次の形の射が単射となるとなることである。

$$\mathcal{F}(U)\to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U},X)$$

これは **Set** 上の写像なので、次の形の図式が差核になることと言い換えられる。

$$\mathcal{F}(U) \to Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \rightrightarrows \{Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \cup_{\mathcal{F}(U)} Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X)$$

任意の極限は極限と可換なので、特に差核および積とも可換である。また、Hom 関手は任意の極限を保つ。よって、包含関手は任意の極限を創出する。よって $CPSh(\mathscr{U})$ は完備であり、反映的であることから余完備である。また、冪対象を持つことからデカルト閉圏である。 □

1.3.2　具体前層の層化

次に、具体前層の層化について述べる。

命題 1.3.9. 具体前層は分離的である。

証明. 具体景の上では、$\{U_i \to U\}_i$ が被覆ならば、$\coprod \tilde{U}_i \to \tilde{U}$ は全射である。よって、$Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \to \prod Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, X)$ は単射である。

$(X, \mathcal{F})$ を具体前層とすると、次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\text{単射}"', "\tilde{\mathcal{F}}_U"] & \prod \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod \tilde{\mathcal{F}}_{U_i}"] \\
Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \arrow[r, "\text{単射}"'] & \prod Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, X)
\end{tikzcd}$$

□

命題 1.3.10. 具体前層の層化は具体層である。

証明. $\mathscr{U}$ は具体景とし、$\mathcal{F}$ を $\mathscr{U}$ 上の具体前層とする。$\mathcal{F}^+$ が具体層であることを示せば良い。

任意の ${}^\forall U \in Ob(\mathscr{U})$ をとり、$\tilde{\mathcal{F}^+}_U(s) = \tilde{\mathcal{F}^+}_U(t)$ を仮定する。すなわち、任意の $x \in \tilde{U}$ に対し、$r_x(s) = r_x(t) \in \mathcal{F}^+(*)$ である。$s = t$ を示せばよい。

$s, t \in \mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K|_{Cov(U)}$ の代表元 $(s_i) \in \prod \mathcal{F}(U_i)$, $(t_j) \in \prod \mathcal{F}(V_j)$ をとって、$s = [(s_i)], t = [(t_j)]$ と表す。必要ならば細分を取り直して $\{U_i\}_i = \{V_j\}_j$ としてよい。

$$\begin{tikzcd}
(s_i), (t_i) \arrow[d, mapsto] & \in & \prod \mathcal{F}(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\text{単射}"', "\prod \tilde{\mathcal{F}}_{U_i}"] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "\tilde{\mathcal{F}^+}_U"] & \ni & s, t \arrow[d, mapsto] \\
(\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)), (\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)) & \in & \prod Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, \mathcal{F}(*)) \arrow[r] & Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}^+(*)) & \ni & \tilde{\mathcal{F}^+}_U(s) = \tilde{\mathcal{F}^+}_U(t)
\end{tikzcd}$$

もしも $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i) = \tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ であれば、$(s_i) = (t_i)$ となり、結局 $s = t$ であることが従う。よって、$\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i) = \tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ を示せばよいが、$\tilde{\mathcal{F}^+}_U(s) = \tilde{\mathcal{F}^+}_U(t)$ であることから、ある細分上で $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)$ と $\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ は等しい。具体前層 $\mathcal{F}$ は分離的だから、$\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)$ と $\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ は被覆 $\{U_i\}_i$ 上で等しい。以上より $\mathcal{F}^+$ は具体層である。 □

$\mathscr{U}$ は具体景とし、$\mathcal{F}$ は $\mathscr{U}$ 上の前層とする。

終対象 $*$ の任意の被覆 $\{U_i \to *\}_i$ に対し、$\coprod \tilde{U}_i \to \tilde{*}$ は全射である。$\tilde{*}$ は一点集合なので、ある添え字 $^\exists i$ が存在して、$\tilde{U}_i = Hom_{\mathscr{U}}(*, U_i)$ は空でない。そこで $x : * \to U_i$ を一つとれば、自明な被覆 $\{* \xrightarrow{id} *\}$ は $\{U_i \to *\}_i$ の細分である。

$\mu : \mathcal{F}^+(*) \to \mathcal{F}(*)$ を次のように定義する。任意の $s \in \mathcal{F}^+(*)$ をとり、代表元 $(s_i) \in \prod \mathcal{F}(U_i)$ をとって、$s = [(s_i)]$ と表す。そこで、上記のように $^\exists x : * \to U_i$ をとり、制限写像 $r_x : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(*)$ によって $\mu(s) \overset{\mathrm{def}}{=} r_x(s_i)$ とする。

補題 1.3.11. μ は *well-defined* である。

証明. 示すべきことは、$\mu(s)$ が代表元 $(s_i) \in \prod \mathcal{F}(U_i)$ および細分 $x : * \to U_i$ の取り方によらないことである。まず、x によらないことを示す。

別の $y : * \to U_j$ が存在したとする。s_i と s_j は $U_i \times_* U_j$ 上で等しいから、次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& U_i \times_* U_j \arrow[r] \arrow[d] & U_j \arrow[d] \\
& U_i \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

次に、$\mu(s)$ が代表元 $(s_i) \in \prod \mathcal{F}(U_i)$ の取り方によらないことを示す。細分 $\{V_j\}_j \to \{U_i\}_i$ が存在した時、(s_i) の $\{V_j\}_j$ への制限を (t_j) と書く。被覆 $\{V_j\}_j$ と s の代表元 (t_j) に対し、上記のように細分 $y : * \to V_j$ をとる。$\{V_j\}_j$ は $\{U_i\}_i$ の細分だから、$* \xrightarrow{x} V_j \to U_i$ がとれる。これを $x : * \to U_i$ と書くと、t_j は s_i の制限だから、$r_x(s_i) = r_y(t_j)$ である。 □

命題 1.3.12. μ は $\nu : \mathcal{F}(*) \to \mathcal{F}^+(*)$ の逆射である。すなわち、$\mathcal{F}(*) \overset{\nu}{\cong} \mathcal{F}^+(*)$ である。

証明. μ の構成より明らか。 □

つまり、具体前層 $(X, \mathcal{F})$ の層化は $(X, \mathcal{F})$ と同じ基底集合 X を持つとしてよい。

系 1.3.13. $\mathcal{F}$ は具体前層とし、$\mathcal{F}^+$ は $\mathcal{F}$ の層化とする。このとき、標準的な射 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ は単射である。

証明. 次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "単射"'] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "単射"] \\
Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*)) \arrow[r, "\cong"] & Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}^+(*))
\end{tikzcd}$$

□

定理 1.3.14. 反映的部分圏 $CSh(\mathscr{U}) \subset CPSh(\mathscr{U})$ の包含関手は任意の極限を創出し、$CPSh(\mathscr{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

1.4　位相空間上の層

1.4.1　一般論

位相空間上の層を改めて勉強する意味はあまりないのだが、ここでは一般の圏 $\mathscr{C}$ を値に持つ層と前層について考察したい。圏 $\mathscr{C}$ は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。その上で、前層及び層は圏 $\mathscr{C}$ を値に持つとする。

命題 1.4.1. X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対し、$\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ が導くすべての茎 *(stalk)* の間の射 $\nu_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ は同型である。

証明. x 周りの任意の開近傍 $U \subset X$ および任意の開被覆 $\{U_i \subset U\}$ に対し、$x \in U_i$ なる i を一つ選び、$K_U(\{U_i \subset U\}) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}_x$ を α と表す。これは i の取り方に依らない。このような α 達によって、$\beta_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}_x$ が導かれる。β_U 達によって導かれる $\mathcal{F}^+_x \to \mathcal{F}_x$ は ν_x の逆射である。 □

$f : X \to Y$ を連続写像とし、$\mathcal{F}$ を Y 上の前層とする。この時、X 上の前層 $f^p\mathcal{F}$ を、$f^p\mathcal{F}(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathcal{F}(U)$ で定める。

命題 1.4.2. $f : X \to Y$ を連続写像とし、$\mathcal{F}$ を Y 上の層とする。X 上の前層 $f^p\mathcal{F}$ は分離的である。

証明. 任意の開集合 $V \subset X$ および開被覆 $\{V_i \subset V\}$ をとる。ここで、$U_i \supset f(V_i)$ なる任意の開集合族 $U_i \subset Y$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(\bigcup U_i) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$f^p\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{U_i \supset f(V_i)} \mathcal{F}(\bigcup U_i)$, $f^p\mathcal{F}(V_i) = \varinjlim_{U_i \supset f(V_i)} \mathcal{F}(U_i)$ で、順極限と差核は交換するから、$f^p\mathcal{F}(V) \to \prod f^p\mathcal{F}(V_i)$ は単射である。 □

注意 1.4.3. $f^p\mathcal{F}(V_i \cap V_j) = \varinjlim_{U_i \supset f(V_i)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ であるとは限らないので、$f^p\mathcal{F}$ が層であるとは限らない。

$f : X \to Y$ を連続写像とし、$\mathcal{F}$ を Y 上の層とする。X 上の前層 $f^p\mathcal{F}$ の層化を $f^*\mathcal{F}$ と書く。これを、層 $\mathcal{F}$ の f による逆像という。

引き続き $f : X \to Y$ を連続写像とし、$\mathcal{G}$ を X 上の前層とする。Y 上の前層 $f_*\mathcal{G}$ を $f_*\mathcal{G}(U) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ によって定める。明らかに、$\mathcal{G}$ が X 上の層ならば $f_*\mathcal{G}$ は Y 上の層である。これを層 $\mathcal{G}$ の f による順像という。

命題 1.4.4. $Hom_{Sh(X)}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) \cong Hom_{Sh(Y)}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G})$

今、明らかに一点集合 $*$ 上の層の圏は $\mathscr{C}$ と一致する。この同一視の下で、位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ の点 $x \in X$ における茎 (stalk) は $\tau_x^* \mathcal{F}$ と書ける。ただし、$\tau_x^* : \{x\} \hookrightarrow X$ は包含写像である。

定義 1.4.5. 各 $C \in Ob(\mathscr{C})$ に対し、X 上の層 $(\tau_x)_* C$ を x における摩天楼層 *(skyscraper sheaf)* という。

X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対し、$\mathcal{F}^\# \overset{\text{def}}{=} \prod_{x \in X} (\tau_x)_* \mathcal{F}_x$ とする。この時、自然な射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\#$ が存在する。

命題 1.4.6. $\mathcal{F}$ が層ならば、自然な射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\#$ は正則な単射 *(regular monomorphism)* である。すなわち、$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\#$ はある図式の差核として書ける。

証明. 各開集合 $U \subset X$ に対し、$\mathcal{F}_U \overset{\text{def}}{=} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F}$ とする。具体的には $\mathcal{F}_U(V) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U \cap V)$ で定義されている。

各 $x \in X$ 周りの任意の開近傍 $U_x \subset X$ に対し、$\{U_x \subset X\}$ は開被覆であるので、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F} \to \prod \mathcal{F}_{U_x} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}_{U_x \cap U_y}$$

$\{U_x \subset U\}$ について順極限をとれば、$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\#$ はある図式の差核として導かれる。 □

系 1.4.7. X 上の層 $\mathcal{F}$ および前層 $\mathcal{G}$ とその間の射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し、f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ がすべて単射ならば、f も単射である。また、$\mathcal{G}$ が層で各 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ がすべて正則な単射ならば、f も正則な単射である。

証明. 次の図式より明らか、

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^\# \\
\Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \prod f_x} \\
\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^\#
\end{array}$$

□

1.4.2　十分多くの点を持つ場合

上記の性質は全射については成り立たない。すなわち、f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ がすべて全射であったとしても、f も全射であるとは限らない。こういった性質を記述するため、トポス論から次の定義を用意する。

定義 1.4.8. 位相空間 X 上の層の圏が十分多くの点を持つとは、X 上の層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とその間の射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し、f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ がすべて同型ならば、f も同型であることである。

以下、圏 $\mathscr{C}$ の性質として、任意の位相空間 X 上の $\mathscr{C}$ に値を持つ層の圏が十分多くの点を持つと仮定する。

命題 1.4.9. X 上の層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とその間の射 $f, g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し、f, g が導く各茎の間で $f_x = g_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ならば、$f = g$ である。

証明. 次のような差核図式をとる。

$$\mathcal{H} \xrightarrow{h} \mathcal{F} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、次の差核図式が導かれる。

$$\mathcal{H}_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{F}_x \overset{f_x}{\underset{g_x}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_x$$

$f_x = g_x$ より、h_x は同型である。よって、h は同型である。 □

命題 1.4.10. X 上の層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とその間の射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し、f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ が全射ならば、f も全射である。

証明. $g \circ f = h \circ f$ と仮定する。各点 $x \in X$ で茎をとると、$g_x \circ f_x = h_x \circ f_x$ である。f_x 全射だから、$g_x = h_x$ である。よって $g = h$ である。 □

命題 1.4.11. X 上の層の錐 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^i$ について、図式 $\mathcal{F}^i$ が有限で、各茎の錐 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^i$ が極限錐ならば、$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^i$ は有限極限錐である。

証明. 図式 $\mathcal{F}^i$ の極限 $\mathcal{F}'$ をとる。この時、ただ一つの射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ が導かれる。層の圏の極限は前層の圏の極限と一致するので、すなわち各点で $\mathscr{C}$ 上の極限と一致する。$\mathscr{C}$ 上では有限極限とフィルター余極限は交換するので、各茎 $\mathcal{F}'_x$ は図式 $\mathcal{F}_x^i$ の極限である。よって、$\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ が茎に導く射は同型である。よって $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ は同型である。 □

命題 1.4.12. X を位相空間、$\mathcal{F}$ を X 上の層とする。また、各閉集合 $Z \subset X$ の包含写像を $\tau_Z : Z \hookrightarrow X$ と表す。任意の局所有限閉被覆 $\{Z_i \subset X\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(X) \to \prod \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(Z_i) \rightrightarrows \prod \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}(Z_i \cap Z_j)$$

証明. 次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{F} \to \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F} \rightrightarrows \prod (\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、

$$\mathcal{F}_x \to \prod ((\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F})_x \rightrightarrows \prod ((\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F})_x$$

ここで、次のことに注意をする。IPC 性質からは、$\varinjlim_{U_i \ni x} \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U_i) \cong \prod \varinjlim_{U_i \ni x} (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U_i)$ であることがすぐにわかる。ところが、今計算している極限は $\varinjlim_{U \ni x} \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U)$ である。すなわち、i によらない添え字で順極限をとっているのである。この順極限と積の交換を見るためには、積が有限でなければならない。そこで、局所有限性を用いて、十分小さい開近傍をとれば積は有限となることを見る必要がある。

任意の閉集合 $Z \subset X$ に対して、

$$((\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F})_x = \begin{cases} * & (x \notin Z) \\ \mathcal{F}_x & (x \in Z) \end{cases}$$

である。よって、上の図式は下のように書ける。

$$\mathcal{F}_x \to \prod_{Z_i \ni x} \mathcal{F}_x \rightrightarrows \prod_{Z_i \cap Z_j \ni x} \mathcal{F}_x$$

これが差核であることは簡単にわかる。 $\square$

命題 1.4.13. X を正則空間、$Z \subset X$ を閉集合とし、$\tau_Z : Z \hookrightarrow X$ は包含写像とする。X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し、$\tau_Z^p \mathcal{F} = \tau_Z^* \mathcal{F}$ である。

証明. まずは $\varinjlim_{U \supset Z} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \to (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ が同型であることを示す。各点で茎をとれば、$x \in Z$ の時は $\mathcal{F}_x \overset{=}{\to} \mathcal{F}_x$ となり、$x \notin Z$ の時は X が正則であることより $* \to *$ となる。これらはすべて同型である。

$\varinjlim_{U \supset Z} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \to (\tau_Z)_* \tau_Z^p \to (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ なる合成が同型だから、$(\tau_Z)_* \tau_Z^p \to (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ は分裂全射である。これが単射であればよい。

Z の任意の開集合 V、開被覆 $\{V_i \subset V\}$ および $U_i \supset V_i$ なる開集合族 $U_i \subset X$ に対し、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\bigcup U_i) \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
K(\{V_i \subset V\}) \arrow[r] & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

ここで、上列は差核である。$U_i \supset V_i$ について順極限をとれば、IPC 性質およびフィルター余極限と差核が交換することから、次の図式が導かれる。

$$\begin{tikzcd}
\tau_Z^p \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\text{正則な単射}"] \arrow[d, "\text{正則な単射}"'] & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \arrow[d, equal] & \\
K(\{V_i \subset V\}) \arrow[r, "\text{正則な単射}"'] & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

今、図式は余完備な圏で考えているので、正則な単射は余核対 (cokernel pair) の差核である。$\{V_i \subset Z\}$ について順極限をとれば、フィルター余極限と差核が交換することから、$\tau^p_Z\mathcal{F}(V) \to \tau^*_Z\mathcal{F}(V)$ は正則な単射である。よって、$\tau^p_Z\mathcal{F} \to \tau^*_Z\mathcal{F}$ は正則な単射である。 □

1.5　一般化された位相空間

1.5.1　単体的集合とそのアナロジー

単体的集合

定義 1.5.1 (単体圏). 単体圏とは、次のように定義される圏 Δ のことである。

- Δ の対象は有限順序数 $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ である。
- Δ の射は順序を保つ写像である。

圏 Δ には生成元と基本関係式による具体的な表示が与えられている。
$\delta^n_i : n \to n+1 (0 \leq i \leq n)$ および $\sigma^n_i : n+1 \to n(0 \leq i \leq n-1)$ を

$$\delta^n_i(k) = \begin{cases} k & (k < i) \\ k+1 & (k \geq i) \end{cases} \qquad \sigma^n_i(k) = \begin{cases} k & (k \leq i) \\ k-1 & (k > i) \end{cases}$$

によって定める。右上の添え字はしばしば省略する。

補題 1.5.2. 圏 Δ は δ_i および σ_i たちによって生成され、基本関係式は次の等式で表される。

$$\begin{array}{rcll} \delta_i \circ \delta_j & = & \delta_{j+1} \circ \delta_i & (i \leq j) \\ \sigma_j \circ \sigma_i & = & \sigma_i \circ \sigma j + 1 & (i \leq j) \\ \sigma_j \circ \delta_i & = & \left\{ \begin{array}{cl} \delta_i \circ \sigma_{j-1} & (i < j) \\ id & (i = j,\ or,\ j+1) \\ \delta_{i-1} \circ \sigma_j & (i > j+1) \end{array} \right. & \end{array}$$

これにより、圏 Δ の表現（すなわち、圏 Δ から延びる関手）を計算することができる。

定義 1.5.3 (単体的対象). 単体圏 Δ の対象を正の順序数に制限した充満部分圏を Δ^+ と表す。

C は圏とする。C 上の単体的対象 *(simplicial object)* とは、C に値を持つ Δ^+ 上の前層のことである。

C 上の添加単体的対象 *(augmented simplicial object)* とは、C に値を持つ Δ 上の前層のことである。

単体的対象または添加単体的対象 X に対し、$X(n)$ を X_{n-1} と書く。これらの間の射とは、自然変換のことである。

注意 1.5.4. C が終対象 $*$ を持ち、単体的対象 X があった場合、$X_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} *$ とすることで X を添加単体的対象へと拡張できる。後で見るように、添加単体的対象と単体的対象は、概念としてはほぼ同等である。よって、用語としてはしばしばこれらを区別せず、主に添加単体的対象を単体的対象と呼ぶ。

例 1.5.5 (単体的集合). C が集合と写像の圏 **Set** のとき、**Set** 上の単体的対象のことを単体的集合 (simplicial set) と呼ぶ。単体的集合の圏を **SSet** と書く。

具体的には、次のようなデータで表すこともできる。すなわち、単体的集合とは自然数 n で添え字付けられた集合 X_n および、それらの間の写像 $d_i^n : X_n \to X_{n-1} (0 \leq i \leq n)$ および $s_i^n : X_{n-1} \to X_n (0 \leq i \leq n-1)$ 達の組 $X = \{X_n, d_i^n, s_i^n\}$ であり、次の関係式を満たすものである。

$$\begin{array}{rcll} d_j \circ d_i & = & d_i \circ d_{j+1} & (i \leq j) \\ s_i \circ s_j & = & s_{j+1} \circ s_i & (i \leq j) \\ d_i \circ s_j & = & \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & (i < j) \\ id & (i = j, \text{ or}, \ j+1) \\ s_j \circ d_{i-1} & (i > j+1) \end{cases} & \end{array}$$

ここで、各 $x \in X_n$ は n 次元単体と対応し、d_i^n は単体の "i 番目の頂点を忘れる" 写像であり、s_i^n は "i 番目の頂点を重ねる" 写像である。

例 1.5.6 (単体的空間). C が位相空間と連続写像の圏 **Top** のとき、**Top** 上の単体的対象のことを単体的空間 (simplicial space) と呼ぶ。単体的空間の圏を **STop** と書く。集合を離散空間と見なすことで、単体的集合は単体的空間と見なせる。

単体圏は幾何学的解釈を持つ。その名の通り、単体達がそれを与える。

Δ^{-1} を空集合、Δ^n を標準的な向き付きの n 次元単体とする。頂点集合の間の順序を保つ写像を線形に拡張することにより、$n \mapsto \Delta^{n-1}$ は関手 $\Delta \to$ **Top** を与える。誤解のない場合、この関手も Δ と表す。ここで、各 δ_i^n は単体の "i 番目の面に埋め込む" 写像であり、σ_i^n は "i 番目の面につぶす" 写像である。

任意の位相空間に対し、標準的な単体的集合が対応する。

例 1.5.7. 各位相空間 X に対し、単体的集合 $Sing(X) \stackrel{\text{def}}{=} Hom(\Delta-, X)$ が定まる。これを X の特異単体的集合 (singular simplicial set) と呼ぶ。$X \mapsto Sing(X)$ は関手的である。

また、次の自明な例はある意味で単体を表す。

例 1.5.8 (単体). 単体圏 Δ の各対象 n に対し、$Hom(-, n)$ は単体的集合である。これを $n-1$ 次元単体と呼ぶ。誤解のない場合、これを Δ^{n-1} で表す。

幾何学的実現

任意の単体的集合はセル複体として実現することができる。これは性質 W(weak topology) は満たすものの、性質 C(closure finite) を満たすとは限らないため、一般には CW 複

体ではない。X は単体的空間とする。関手 $S_X : (\Delta^+)^{op} \times \Delta^+ \to \mathbf{Top}$ を、$S_X(n,m) \overset{\text{def}}{=} X_{n-1} \times \Delta^{m-1}$ によって定める。

定義 1.5.9 (幾何学的実現)**.** 単体的空間 X の幾何学的実現 *(geometric realization)* とは、S_X のコエンド $\int^n S_X(n,n)$ のことである。これを $|X|$ と書く。

添加単体的空間 X についても同様に、幾何学的実現を定義することができる。この時、Δ^{-1} が空集合であることから、X_{-1} は本質的に機能しない。よって、単体的空間と添加単体的空間は、数学的には区別されるものの、概念としてはほぼ同等である。単体的空間 X の幾何学的実現は、具体的に次で与えられる。

命題 1.5.10.

$$|X| \cong (\coprod_n X_{n-1} \times \Delta^{n-1})/\sim$$

ただし、$\sim$ は次の二項関係 $\overset{p}{\sim}$ が生成する同値関係である。

$$(x,p) \overset{p}{\sim} (y,q) \Leftrightarrow \begin{cases} d_i(x) = y, \sigma_i(q) = p \\ \text{または} \\ s_i(x) = y, \delta_i(q) = p \end{cases}$$

$X \mapsto Sing(X)$ および $Y \mapsto |Y|$ の二つの対応によって、**Top** と **SSet** の間には双方向の関手が定まる。これらは実は随伴を定める。

命題 1.5.11. 任意の位相空間 X に対し、自然な連続写像 $\epsilon_X : |Sing(X)| \to X$ が存在し、次の普遍性を満たす。

任意の単体的集合 Z および連続写像 $f : |Z| \to X$ に対し、次の図式を可換にする射 $\hat{f} : Z \to Sing(X)$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc} |Sing(X)| & \xrightarrow{\epsilon_X} & X \\ \uparrow{\scriptstyle |\hat{f}|} & \nearrow{\scriptstyle f} & \\ |Z| & & \end{array}$$

証明. $\tilde{\epsilon}^n : Sing(X)_n \times \Delta^n \to X$ を

$$\tilde{\epsilon}^n(s,p) = s(p)$$

によって定める。$d_i(s)=t,\sigma_i(q)=p$ の時、

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{\epsilon}^n(s,p) & = & s(p)\\
 & = & (s\circ\sigma_i)(q)\\
 & = & (d_i(s))(q)\\
 & = & t(q)\\
 & = & \tilde{\epsilon}^{n-1}(t,q)
\end{array}
$$

同様に $s_i(s)=t,\delta_i(q)=p$ のとき $\tilde{\epsilon}^n(s,p)=\tilde{\epsilon}^{n+1}(t,q)$ である。よって $\tilde{\epsilon}^n$ 達は連続写像 $\epsilon_X:|Sing(X)|\to X$ を定める。これが普遍性を満たすことを示す。

任意の単体的集合 Z および連続写像 $f:|Z|\to X$ をとる。上記の図式を可換とする $\hat{f}$ が存在したと仮定する。この時、次の図式が可換でなければならない。

$$
\begin{tikzcd}
Z_n\times\Delta^n \arrow[r, "\hat{f}_n\times id"] \arrow[d, "\pi_n"'] & Sing(X)_n\times\Delta^n \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\tilde{\epsilon}^n"] & \\
{|Z|} \arrow[r, "{|\hat{f}|}"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & {|Sing(X)|} \arrow[dr, "\epsilon_X"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}
$$

これは、任意の $(z,p)\in Z_n\times\Delta^n$ に対して $(\hat{f}_n(z))(p)=\tilde{\epsilon}^n(\hat{f}_n(z),p)=f(\pi_n(z,p))$ でなければならないことを意味する。これは Z と f のみに依存するので、$\hat{f}$ は一意である。逆に、上記の式で $\hat{f}$ を定めれば、これは確かに単体的集合の射である。 □

さらに、上記の対応はある意味でホモトピー群の構造を保つことが知られている。具体的には、**Top** と **SSet** の上にはそれぞれモデル圏の構造が入り、これらが導くホモトピー圏が同値となるのである。

この対応は、ホモトピー群（弱ホモトピー同値）の情報を **SSet** 上で計算するための対応であるが、ホモトピー（ホモトピー同値）の情報は **SSet** 上では計算することができない。ホモトピーの情報を失わないためには、$Sing(X)$ にコンパクト開位相を入れ、**STop** との対応を見る必要がある。

特異単体圏と特異ホモトピー的集合

定義 1.5.12 (特異単体圏)**.** 特異単体圏[†] とは、次のように定義される圏 Δ^S のことである。

- Δ^S の対象は単体 $\Delta^n(n=-1,0,1,\cdots)$ である。
- Δ^S の射は連続写像である。

以下、単体的集合のアナロジーとして、単体圏の代わりに特異単体圏を用いた定義を考える。

定義 1.5.13 (特異ホモトピー的対象)**.** 特異単体圏 Δ^S の対象を非負次元に制限した充満部分圏を Δ^{S+} と表す。

C は圏とする。C 上の特異ホモトピー的対象 *(singular homotopical object)*† とは、C に値を持つ Δ^{S+} 上の前層のことである。

C 上の添加特異ホモトピー的対象 *(augmented singular homotopical object)*† とは、C に値を持つ Δ^S 上の前層のことである。

特異ホモトピー的対象または添加特異ホモトピー的対象 X に対し、$X(\Delta^n)$ を X_n と書く。これらの間の射とは、前層の射のことである。

単体的対象の時と同様、特異ホモトピー的対象と添加特異ホモトピー的対象を区別せず、主に添加特異ホモトピー的対象ことを特異ホモトピー的対象と呼ぶ。

例 1.5.14 (単体的集合). C が集合と写像の圏 **Set** のとき、**Set** 上の特異対象のことを特異ホモトピー的集合 (singular homotopical set)† と呼ぶ。特異ホモトピー的集合の圏を **SingSet** と書く。

例 1.5.15 (単体的空間). C が位相空間と連続写像の圏 **Top** のとき、**Top** 上の特異ホモトピー的対象のことを特異ホモトピー的空間 (singular homotopical space)† と呼ぶ。特異ホモトピー的空間の圏を **SingTop** と書く。集合を離散空間と見なすことで、特異ホモトピー的集合は特異ホモトピー的空間と見なせる。

任意の位相空間に対し、標準的な特異ホモトピー的集合が対応する。

例 1.5.16. 各位相空間 X に対し、X の特異単体的集合 $Sing(X)$ は特異ホモトピー的集合でもある。これを ${}^S X$ と表し、X の特異ホモトピー的集合 † と呼ぶ。$X \mapsto {}^S X$ は関手的である。

特に $X = \Delta^n$ の時、${}^S X$ は特異単体圏 Δ^S の Hom 関手を用いて $Hom(-, \Delta^n)$ と書ける。誤解のない時、これを同じ記号 Δ^n で表す。

特異ホモトピー的空間の幾何学的実現も定義できる。X は特異ホモトピー的空間とする。関手 $S_X : (\Delta^S)^{op} \times \Delta^S \to \mathbf{Top}$ を、$S_X(\Delta^n, \Delta^m) \overset{\mathrm{def}}{=} X_n \times \Delta^m$ によって定める。

定義 1.5.17 (幾何学的実現)**.** 特異ホモトピー的空間 X の幾何学的実現 *(geometric realization)* とは、S_X のコエンド $\int^n S_X(n, n)$ のことである。これを $|X|$ と書く。

特異ホモトピー的空間 X の幾何学的実現は、具体的に次で与えられる。

命題 1.5.18.

$$|X| \cong (\coprod_n X_n \times \Delta^n)/\sim$$

ただし、$\sim$ は次の二項関係 $\overset{p}{\sim}$ が生成する同値関係である。

$$(x, p) \overset{p}{\sim} (y, q) \Leftrightarrow^{\exists} f : \Delta^n \to \Delta^m \ \ s.t.\ \ Xf(x) = y, f(q) = p$$

$X \mapsto {}^S X$ および $Y \mapsto |Y|$ の二つの対応によって、**Top** と **SingSet** の間には双方向の関手が定まる。これらは随伴を定める。

命題 1.5.19. 任意の位相空間 X に対し、自然な連続写像 $\epsilon_X : |{}^S X| \to X$ が存在し、次の普遍性を満たす。

任意の特異ホモトピー的集合 Z および連続写像 $f : |Z| \to X$ に対し、次の図式を可換にする射 $\hat{f} : Z \to {}^S X$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} |{}^S X| \arrow[r, "\epsilon_X"] & X \\ |Z| \arrow[u, "|\hat{f}|"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

さらに、ϵ_X は全単射である。

特異ホモトピー的集合と具体性

特異ホモトピー的集合 X に対し、X_0 を X の基底集合と呼ぶ。また、各 $x \in X_n$ に対し、次の写像 $s_x : \Delta^n \to X_0$ が対応する。この s_x を x の基底写像と呼ぶ。

$$\Delta^n \ni p \mapsto Xf_p(x) \in X_0$$

ただし、$f_p : \Delta^0 \to \Delta^n$ はすべての点を p に対応させる一点写像である。

この表示を用いて、特異ホモトピー的集合の幾何学的実現は、次のように簡潔に表現できる。

命題 1.5.20. 特異ホモトピー的集合 X について、次の同相が成り立つ。

$$|X| \cong (\coprod_x \{x\} \times \Delta^n)/\sim$$

ただし、$\sim$ は次の写像を商写像とする同値関係である。

$$\coprod s_x : \coprod_n \coprod_{x \in X_n} \{x\} \times \Delta^n \to X_0$$

とくに、次が成り立つ。

命題 1.5.21. 任意の位相空間 X に対し、$\epsilon_X : |{}^S X| \to X$ は全単射である。

ここで、$x \neq y$ であっても $s_x = s_y$ となる可能性がある。次のような時には、s_x を x そのものと同一視することができる。

定義 1.5.22 (具体的特異ホモトピー的対象)**.** 特異ホモトピー的集合が具体的 *(concrete)* であるとは、前層として具体的であることである。

例 1.5.23. ${}^S X$ は具体的である。

1.5.2　具体的特異ホモトピー集合の取り扱いのテクニック

特異ホモトピー的集合の圏 **SingSet** について便利な性質をまとめておく。

命題 1.5.24. X は弱位相を持つセル複体とする。とくに、セル $e_i^{n_i} \cong \Delta^{n_i}$ からの連続写像 $\pi_i : e_i^{n_i} \to X$ の族が存在し、その非交和 $\pi = \coprod \pi_i : \coprod e_i^{n_i} \to X$ は商写像である。このとき、$\epsilon_X : |^S X| \to X$ は同相である。

証明. 逆写像が連続であればよい。$\tilde{h}_i : e_i^{n_i} \to |^S X|$ を $\tilde{h}_i(p) = [\pi_i, p]$ によって定義する。これらの和は連続写像 $X \to |^S X|$ を導き、これは ϵ_X の逆写像である。 □

命題 1.5.25. X は位相空間とし、A は弱位相を持つセル複体とする。このとき、連続写像 $fA \to X$ に対して射 $Sf : {}^S A \to {}^S X$ を与える対応は全単射である。

証明. 次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd} |^S A| \arrow[r, "|^S f|"] \arrow[d, "\epsilon_A"', "\cong"] & |^S X| \arrow[d, "\epsilon_X"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

□

定理 1.5.26. **SingSet** は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。さらに、**SingSet** 上ではフィルター余極限と有限極限が交換し、*IPC* 性質を満たす。

証明. 一般の前層の圏の性質より従う。 □

命題 1.5.27. $X = \varinjlim_i X_i$ を **SingSet** 上のフィルター余極限錐とする。また、$f : \Delta^n \to X$ は射とする。

1. 次の図式を可換にする $\tilde{f} : \Delta^n \to X_i$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

2. 別の $\tilde{g} : \Delta^n \to X_j$ に対しても上記の性質を満たすとき、ある $i \to k$ および $j \to k$ が存在して次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{g}"] & X_i \arrow[d] \\ X_j \arrow[r] & X_k \end{tikzcd}$$

証明. 米田同型より $Hom_{\mathbf{SingSet}}(\Delta^n, X) \cong X(\Delta^n)$ である。上記の性質は単にフィルター余極限の定義を言い換えただけである。 □

1.5.3　ホモトピー論

Top 上のホモトピー論

特異ホモトピー的対象の圏 **SingSrt** 上のホモトピー論に関する説明の前に、位相空間の圏 **Top** 上のホモトピー論をおさらいしよう。

定義 1.5.28. $f : X \to Y$ が *Serre* 束 *(Serre fibration)* または *Serre* ファイブレーションであるとは、任意の n 次元円盤 D^n と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、$I = [0, 1]$ は単位閉区間とする。

$$
\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "^{\exists}\gamma"] & Y
\end{tikzcd}
$$

$f : X \to Y$ が微小的 *Serre* 束 *(micro-fibration)* または *Serre* マイクロ・ファイブレーションであるとは、任意の n 次元円盤 D^n と上記のような四角形の可換図式に対し、十分小さい $\epsilon > 0$ と斜めに横断する射 $\gamma : D^n \times [0, \epsilon] \to X$ が存在し、図式を全て可換にすることである。

例 1.5.29. ファイバー束は Serre 束である。

例 1.5.30. 滑らかな多様体の間の沈め込みは微小的 Serre 束である。

Top 上には Serre 束を fibration としたモデル圏の構造が入る。この時、モデル圏の構造を定める weak equivalence とは弱ホモトピー同値のことである。

定義 1.5.31. $f : X \to Y$ が弱ホモトピー同値であるとは、$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ が全単射であり、任意の基点 $x \in X$ および任意の正整数 n に対し、ホモトピー群の間の写像 $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ が同型になることである。

これは次の同値な特徴づけがある。

命題 1.5.32. $f : X \to Y$ が弱ホモトピー同値であることは次の条件と同値である。

次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする。ただし、$S^{-1} = \emptyset$ とする。

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
D^n \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "^{\exists}\gamma"] & Y
\end{tikzcd}
$$

証明.
(十分性) $n = k$ の条件から $f_* : \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$ の全射性が示され、$n = k + 1$ の条件から $f_* : \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$ の単射性が示される。
(必要性)

□

一方、**Top** 上にはホモトピー同値を weak equivalence とするモデル圏の構造も入る。このとき fibration として機能するのは、Serre 束よりも強い、Hurewicz 束というものである。

定義 1.5.33. $f : X \to Y$ が *Hurewicz* ファイブレーション *(Hurewicz fibration)* であるとは、任意の位相空間 A と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、$I = [0, 1]$ は単位閉区間とする。

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ A \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "^\exists\gamma"] & Y \end{tikzcd}$$

$f : X \to Y$ が微小的 *Hurewicz* ファイブレーション *(micro-fibration)* または *Hurewicz* マイクロ・ファイブレーションであるとは、任意の位相空間 A と上記のような四角形の可換図式に対し、十分小さい $\epsilon > 0$ と斜めに横断する射 $\gamma : A \times [0, \epsilon] \to X$ が存在し、図式を全て可換にすることである。

SingSet 上のホモトピー論

1.5.4 hTop に値を持つ層

定理 1.5.34. X を位相空間とし、X 上の **hTop** に値を持つ層 $\mathcal{F}$ をとる。このとき、任意の位相空間 A に対し、$U \mapsto \mathcal{F}(U)(A)$ は X 上の **Set** に値を持つ層である。この層を $\mathcal{F}[A]$ と表した時、各茎は $\mathcal{F}[A]_x = \mathcal{F}_x(A)$ である。

さらに、$A \mapsto \mathcal{F}[A]$ は関手 $\mathbf{Top}^{op} \to Sh(X; \mathbf{Set})$ を与える。これは有限閉被覆系について張り合わせ条件を満たす。すなわち、$Sh(X; \mathbf{Set})$ に値を持つ層である。この対応により、圏同値 $Sh(X; \mathbf{hTop}) \cong Sh(\mathbf{Top}; Sh(X; \mathbf{Set}))$ が定まる。

証明. 任意の開集合 $U \subset X$ および開被覆 $\{U_i \subset U\}$ をとる。この時、次の図式は **hTop** 上の差核である。

$$\mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

すなわち、これは $\mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ 上の差核であるので、任意の位相空間 A に対し、次の図式は **Set** 上の差核である。

$$\mathcal{F}(U)(A) \to \prod \mathcal{F}(U_i)(A) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)(A)$$

よって、$\mathcal{F}[A]$ は層である。また、$\mathbf{hTop}$ 上のフィルター余極限は $\mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ 上のフィルター余極限と一致するので、同様に $\mathcal{F}[A]_x = \mathcal{F}_x(A)$ である。

　後半は明らか。 □

命題 1.5.35. 位相空間 X 上の $\mathbf{hTop}$ に値を持つ層の圏は、十分多くの点を持つ。

証明. 位相空間 X 上の $\mathbf{hTop}$ に値を持つ層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ およびその間の射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について、f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ がすべて同型であると仮定する。任意の位相空間 A に対し、$f[A]_x : \mathcal{F}[A]_x \to \mathcal{G}[A]_x$ は同型である。よって $f[A] : \mathcal{F}[A] \to \mathcal{G}[A]$ は同型である。すなわち、f は同型である。 □

第2章　ホモトピー原理

2.1　ジェット束とホモトピー原理

ジェット束の勉強には [4] [7] [6] などが参考になるようである。Wikipedia(Jet (mathematics) , Jet bundle) も参考になる。

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$f : U \to V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。各自然数 r に対し、$D_p^r f : \bigotimes^r \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $D_p^r f(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(p)$ で定める。（ただし、$\{\boldsymbol{e}_i\}_i$ は標準的な基底である。）これを用いて、多項式写像

$$P_p^r f(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} f(p) + \frac{1}{1!} D_p f(\boldsymbol{x} - p) + \frac{1}{2!} D_p^2 f(\boldsymbol{x} - p)^{\otimes 2} + \cdots + \frac{1}{r!} D_p^r f(\boldsymbol{x} - p)^{\otimes r} \in (\mathbb{R}[\boldsymbol{x}])^m$$

を定める。

定義 2.1.1. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$f : U \to V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。多項式の同値類を値に持つベクトル $j_p^r f(\boldsymbol{x}) = [P_p^r f(\boldsymbol{x})] \in (\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]/(r+1$ 次単項式 $))^m$ を f の点 p における r-ジェットと呼ぶ。$J^r(U, V) \overset{\text{def}}{=} \{j_p^r f | p \in U . f : U \to V$ は滑らかな写像$\}$ を（アフィン）r-ジェット空間 *(r-jet space)* という。

命題 2.1.2. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、$f : U \to V$, $g : V \to W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j_p^r(g \circ f) = j_{f(p)}^r g \circ j_p^r f$ である。

証明. Faà di Bruno の公式の言い換えである。具体的には次のように解ける。

Taylor の公式より、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= P_p^r f(\boldsymbol{x}) + o(|\boldsymbol{x} - p|^r) \\ g(\boldsymbol{y}) &= P_{f(p)}^r g(\boldsymbol{y}) + o(|\boldsymbol{y} - f(p)|^r) \\ (g \circ f)(\boldsymbol{x}) &= P_p^r (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + o(|\boldsymbol{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} &P_p^r (g \circ f)(\boldsymbol{x}) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\boldsymbol{x}) \\ &= \{P_{f(p)}^r g(P_p^r f(\boldsymbol{x}) + o(|\boldsymbol{x} - p|^r)) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\boldsymbol{x})\} + o(|f(\boldsymbol{x}) - f(p)|^r) + o(|\boldsymbol{x} - p|^r) \\ &= o(|\boldsymbol{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。これは多項式だから、r 次以下の項は 0 である。 □

定義 2.1.3. M, N を多様体、$f : M \to N$ を滑らかな写像とし、点 $p \in M$ をとる。f の点 p における r-ジェット *(r-jet)* $j^r_p f$ とは、各座標近傍 $(U, \phi) \subset M$, $(V, \psi) \subset N$（$p \in U$, $f(p) \in V$）に対して $j^r_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \in J^r(U, V)$ を対応させるものである。

$J^r(M, N) \overset{\text{def}}{=} \{j^r_p f | p \in M. f : M \to N$ は滑らかな写像$\}$ を r-ジェット空間 *(r-jet space)* という。

命題 2.1.4. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、$f : U \to V$, $g : U \to W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j^r_p(f \times g) = j^r_p f \times j^r_p g \in (\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]/(r+1 \text{ 次式}))^{m+k}$ である。

定義 2.1.5. $f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$s : B \to E$ を滑らかな切断とし、点 $p \in B$ をとる。s の点 p における r-ジェット $j^r_p s$ とは、各自明化近傍 $(U, h : f^{-1}(U) \to F \times U)$（$p \in U$）に対して $j^r_p(pr_1 \circ h \circ s) \in J^r(U, F)$ を対応させるものである。

$J^r(f) \overset{\text{def}}{=} \{j^r_p s | p \in B. s : B \to E$ は滑らかな切断$\}$ を r-ジェット束 *(r-jet bundle)* という。

注意 2.1.6. $s : B \to E$ を写像として見た時のジェットと切断として見たときのジェットは、同じ記号を用いてしまったが、明確に異なる。写像 $M \to N$ のジェットとは、自明束 $N \times M \to M$ の切断のジェットと見なせる。

$J^r(M, N)$ は、$J^r(U, V)$ の集まりを座標近傍系として多様体の構造を持つ。同様に、$J^r(f)$ は、$J^r(U, F)$ の集まりを貼り合わせることで多様体の構造を持つ。さらに、$j^r_p s \mapsto p$ によって自然にファイバー束 $J^r(f) \to B$ が定まる。ジェット束と言った時、このファイバー束構造を暗に含めることが多い。

$f : E \to B$ がベクトル束の時、ジェット束 $J^r(f) \to B$ はベクトル束の構造を持つ。

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$s : B \to E$ を滑らかな切断とする。この時、r-ジェット束 $J^r(f) \to B$ の切断 $j^r s : B \to J^r(f)$ が、$j^r s(p) \overset{\text{def}}{=} j^r_p s$ によって定まる。

定義 2.1.7. 滑らかなファイバー束 $f : E \to B$ 上の r 階の偏微分関係 *(partial differential relation)* とは、r-ジェット束 $J^r(f) \to B$ の部分束 $R \subset J^r(f)$ のことである。r 階の偏微分関係 R が開（*resp.* 閉）であるとは、$R \subset J^r(f)$ が部分集合として開（*resp.* 閉）であることをいう。

滑らかな切断 $s : B \to E$ が偏微分関係 R の解 *(solution)* であるとは、$Im(j^r s) \subset R$ を満たすことである。

$f : E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。各開集合 $U \subset B$ に対し、$Sol(U; R) \overset{\text{def}}{=} \{s : U \to E | s$ は R の解$\}$, $\Gamma(U; R) \overset{\text{def}}{=} \{s : U \to R | s$ は $R \to B$ の U 上の連続な切断$\}$ とする。$Sol(-; R)$, $\Gamma(-; R)$ は $\mathbf{qTop}$ に値を持つ B 上の層である。

定義 2.1.8. r 階の偏微分関係 $R \subset J^r(f)$ が h-原理 *(h-principle)* を満たすとは、$\pi_0(Sol(B; R)) \to \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射となることである。(次のように言い換えられる。すなわち、$R \to B$ の任意の連続な切断 $t : B \to R$ に対し、R の解 $s : B \to E$ が存在し、s と t は R 上でホモトピックとなる。)

R がパラメトリック h-原理 *(parametric h-principle)* を満たすとは、$Sol(B;R) \subset \Gamma(B;R)$ が弱ホモトピー同値となることである。

2.2 層理論的ホモトピー原理

2.2.1 定義

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を $\mathbf{vTop}$ に値を持つ B 上の層とする。

任意の位相空間 P に対し、$\mathcal{F}$ の P に関するパラメータ化 $\mathcal{F}^P$ とは、次のように定義される $B \times P$ 上の層である。

$$\text{各開集合 } U \subset B, R \subset P \text{ に対し、} \mathcal{F}^P(U \times R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}(U)^R$$

実際、次の補題により、これは $B \times P$ 上の層を定める。

補題 2.2.1. 各開集合 $U \subset B,\ R \subset P$ およびそれぞれの開被覆 $\{U_i\},\ \{R_k\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(U)^R \to \prod \mathcal{F}(U_i)^{R_k} \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)^{R_k \cap R_l}$$

証明. X を任意の位相空間とし、$(f_{ik}) \in \prod \mathcal{F}(U_i)^{R_k}(X)$ について、$r_1((f_{ik})) = r_2((f_{ik}))$ を仮定する。$\{R_k\}$ は R の開被覆だから、下図の上列は余差核である。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, dotted, "f_i"'] & \coprod R_k \arrow[l] \arrow[dl, "f_{ik}"] & \coprod R_k \cap R_l \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ \mathcal{F}(U_i) & & \end{tikzcd}$$

これにより、上図の f_i がただ一つ導かれる。これはさらに下図の f をただ一つ導く。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & & \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

□

注意 2.2.2. $\mathbf{vTop}$ 上の極限と $\mathbf{hTop}$ 上の極限が一致することから、$\mathbf{vTop}$ に値を持つ層は $\mathbf{hTop}$ に値を持つ層と見なせる。上記のパラメータ化には開被覆系に関する貼り合わせの議論が必要であり、$\mathbf{vTop}$ に値を持つ層だからこそ定義できる。一方、$\mathbf{vTop}$ に値を持つ前層には層化が定義できず、また茎も上手くふるまわない。そこで、層化や茎をとった議論を行う場合は $\mathbf{hTop}$ に値を持つ前層と見なす必要がある。

$\mathcal{F}$ の B に関するパラメータ化 $\mathcal{F}^B$ は $B \times B$ 上の層である。そこで、対角射 $\Delta : B \to B \times B$ による $\mathcal{F}^B$ の引き戻しを $\mathcal{F}^* \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^* \mathcal{F}^B$ とする。これは **hTop** に値を持つ層である。

各開集合 $U \subset B$ に対し、次の射の列を考える。

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}(U)^U = \mathcal{F}^B(U \times U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}^*(U)$$

ただし、α は $\mathcal{F}(U) \times U \stackrel{pr_1}{\to} \mathcal{F}(U)$ に対応する射で、β は $\Delta(U) \subset U \times U$ が導く標準的な写像である。これによって、層の射 $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \beta \circ \alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ が定まる。構成より明らかに Δ は全射ではない。実際、$\mathcal{F}^*(U)$ の切断は、各点 $x \in U$ に対しある切断 s^x の芽 $s^x_x \in \mathcal{F}_x$ を "連続的" に対応させるものである。ここで、連続的というのは $(x, y) \mapsto s^x_y$ なる対応が（局所的に）連続であることを意味する。

命題 2.2.3. 任意の開集合 $U \subset B$ に対して $\mathcal{F}(U)$ が擬位相空間ならば、$\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ は単射である。

証明.

$$\begin{aligned} \Delta(s) = \Delta(t) &\Leftrightarrow {}^\forall x \in U \text{ に対して } s_x = t_x \\ &\Leftrightarrow s = t \end{aligned}$$

□

$\mathcal{F}^*$ の切断を $\mathcal{F}$ の形式的な切断と呼ぶことにする。これと比較して $\mathcal{F}$ の切断を $\mathcal{F}$ の厳密な切断と呼ぶことにする。

定義 2.2.4. *B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **vTop** に値を持つ B 上の層とする。*

*$\mathcal{F}$ が (層理論的)h-原理 ((sheaf theoritic) h-principle) を満たすとは、$\pi_0(\mathcal{F}(U)) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_0(\mathcal{F}^*(U))$ が全射となることである。(**qTop** に値を持つならば、次のように言い換えられる。すなわち、任意の開集合 $U \subset B$ および任意の形式的な切断 ${}^\forall s \in \mathcal{F}^*(U)$ に対し、ある厳密な切断 ${}^\exists t \in \mathcal{F}(U)$ が存在して、$\mathcal{F}^*(U)$ の中で s と t を結ぶ道が存在する。)*

$\mathcal{F}$ がパラメトリック h-原理 (parametric h-principle) を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、$\Delta : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値となることである。

2.2.2 しなやか (flexible) な層

任意の部分集合 $K \subset B$ に対し $\mathcal{F}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{F}(U)$ と定めるのだが、やはり **hTop** 上の順極限によって $\mathcal{F}(K)$ を定める。B が正則、K が閉集合であれば、1.4.13 より、$\mathcal{F}(K) = \tau_K^* \mathcal{F}(K)$ である。

定義 2.2.5. *B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層または前層とする。*

$\mathcal{F}$ がしなやか (flexible) またはフレキシブルであるとは、任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset^\forall L \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(K)$ が Serre ファイブレーションになることである。

$\mathcal{F}$ が微小的しなやか *(micro-flexible)* またはマイクロ・フレキシブルであるとは、任意の二つのコンパクト部分集合 $K \subset L \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(K)$ が微小的 *Serre* ファイブレーションになることである。

命題 2.2.6. B を局所有限な単体複体（*e.g.* 多様体)、$\mathcal{F}$ を **vTop** に値を持つ B 上の層とする。

1. 形式的な切断の層 $\mathcal{F}^*$ はしなやかである。
2. $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

証明.

1. $\mathcal{F}^*$ はしなやかである。

任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset^\forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}^*(L) \arrow[d] \\ D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \mathcal{F}^*(K) \end{tikzcd}$$

γ の存在を示せばよい。
1.5.27 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$（$U \subset W$）および二つの仮想的連続写像 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \to \mathcal{F}^*(W), \tilde{\beta} : D^n \times I \to \mathcal{F}^*(U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}^*(W) \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ D^n \times \{0\} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}^*(L) \arrow[dd] \\ & \mathcal{F}^*(U) \arrow[dr] & \\ D^n \times I \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F}^*(K) \end{tikzcd}$$

同様に、$\mathcal{F}^*$ の定義から、ある開被覆 $\{U_i \subset U\}, \{W_k \subset W\}$（$\{U_i\}$ は $\{U \cap W_k\}$ の細分。）および二つの仮想的連続写像 $\bar{\alpha} : D^n \times \{0\} \to \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)), \bar{\beta} : D^n \times I \to$

$\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}^*(W) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& D^n \times \{0\} \arrow[ul, "\bar{\alpha}"] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}^*(L) \arrow[dd] \\
\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^*(U) \arrow[dr] & \\
& D^n \times I \arrow[ul, "\bar{\beta}"] \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F}^*(K)
\end{tikzcd}$$

ここで、$\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k))$, $\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$ は次の図式が差核となるように定義されている。

$$\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \to \prod \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(W_k \cap W_l)^{W_k \cap W_l}$$
$$\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \to \prod \mathcal{F}(U_i)^{U_i} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)^{U_i \cap U_j}$$

そこで、次の合成によって α_k, β_i を定める。

$$\alpha_k : D^n \times \{0\} \stackrel{\bar{\alpha}}{\to} \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \to \prod \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \to \mathcal{F}(W_k)^{W_k}$$
$$\beta_i : D^n \times I \stackrel{\bar{\beta}}{\to} \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \to \prod \mathcal{F}(U_i)^{U_i} \to \mathcal{F}(U_i)^{U_i}$$

冪対象の普遍性により、これらはただ一つの $\alpha'_k : D^n \times \{0\} \times W_k \to \mathcal{F}(W_k)$, $\beta'_i : D^n \times I \times U_i \to \mathcal{F}(U_i)$ を導く。今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \to I$ で、K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、$\phi : D^n \times I \times U \to D^n \times I \times U$ を $\phi(x,t,v) \stackrel{\text{def}}{=} (x, t\delta(v), v)$ として定める。$W'_k \stackrel{\text{def}}{=} W_k - supp(\delta)$, $W_{k,i} \stackrel{\text{def}}{=} W_k \cap U_i$ とする。
$\gamma'_{k,i} : D^n \times I \times W_{k,i} \to \mathcal{F}(W_{k,i})$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \times W_{k,i} \stackrel{\phi}{\to} D^n \times I \times W_{k,i} \stackrel{\beta'_i}{\to} \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(W_{k,i})$$

冪対象の普遍性により、これらはただ一つの $\gamma_{k,i} : D^n \times I \to \mathcal{F}(W_{k,i})^{W_{k,i}}$ を導く。また、$\gamma_k : D^n \times I \to \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \twoheadrightarrow D^n \times \{0\} \stackrel{\alpha_k}{\to} \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \to \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$$

$\gamma_{k,i}$, γ_k 達は $\gamma : D^n \times I \to \mathcal{F}^B((\bigcup W_{k,i}) \cup (\bigcup W'_k)) \to \mathcal{F}^*(W) \to \mathcal{F}^*(L)$ を導く。これは、最初の図式を可換にする。

2. $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

$x \in B$ 周りで星形近傍をとることにより、x の近傍基 $^\exists\{U_0 \supset U_1 \supset \cdots \ni x\}$ および連続写像 $^\exists h : U_0 \times I \to U_0$ で、次を満たすものがとれる。

- $h(U_n \times I) \subset U_n$
- $h(x,t) = x$ （$^\forall t \in I$）
- $h(y,0) = y,\, h(y,1) = x$ （$^\forall y \in U_0$）

これを用いて、$H : \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \to \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ を、次の合成に対応する射として定義する。

$$\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \times U_n \overset{id \times h}{\to} \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times U_n \overset{\text{標準的な射}}{\to} \mathcal{F}(U_n)$$

これにより、$\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \to \mathcal{F}(U_n)^x \cong \mathcal{F}(U_n)$ は $\mathcal{F}(U_n) \to \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ のホモトピー逆射である。これらの順極限をとることにより、$\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値であることがわかる。 □

注意 2.2.7. 上記の証明は、D^n を任意の位相空間に置き換えてもそのまま成立する。つまり、$\mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(K)$ は実際には Hurewicz ファイブレーションである。

補題 2.2.8. B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（*e.g.* 多様体)、Ω を B 上のしなやかな層とする。もし任意の $^\forall x \in B$ に対して茎 Ω_x が弱可縮（*i.e.* 一点集合と弱ホモトピー同値）ならば、$\Omega(B)$ は弱可縮である。

証明.

Step.1 $B = I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ の場合

$\Omega(B) \to *$ が弱ホモトピー同値であることを示すため、次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \Omega(B) \arrow[d] \\
D^n \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "^\exists\gamma"] & *
\end{tikzcd}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にすることを示せばよい。

任意の $^\forall x \in B$ に対し、$S^{n-1} \overset{\alpha}{\to} \Omega(B) \to \Omega_x$ なる合成を α_x と表す。$\Omega_x \to *$ が弱ホモトピー同値だから、次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ_x が存在し、図式の上三角を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, hook] & \Omega_x \arrow[d] \\
D^n \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "^\exists\gamma_x"] & *
\end{tikzcd}$$

1.5.27 より、十分小さい x の開近傍 U_x が存在して、α_x, γ_x を次のように持ち上げられる。

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\tilde{\alpha}_x"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\alpha_x" near end] & \Omega(U_x) \arrow[d] \\
D^n \arrow[r, "\gamma_x"'] \arrow[ur, "\tilde{\gamma}_x" near start] & \Omega_x
\end{tikzcd}$$

1.5.27 より、$\tilde{\alpha}_x$ は $S^{n-1} \xrightarrow{\alpha} \Omega(B) \to \Omega(U_x)$ なる合成としてよい。$\tilde{\gamma}_x$ 達を貼り合わせて γ を構成したいのだが、このままでは貼り合わない。そこで、貼り合うように上手く変形させたい。

$\{U_x\}_x$ は B を被覆する。$B = I$ であることを用いて、$\{U_x\}_x$ の細分 $\{B_0, B_1, \cdots, B_N\}$ で、次を満たすものがとれる。

- $0 \in B_0$, $1 \in B_N$
- $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$

各 i に対し、$B_i \subset U_x$ なる x を一つ選び、$\tilde{\alpha}_x$, $\tilde{\gamma}_x$ と $\Omega(U_x) \to \Omega(B_i)$ の合成を α_i, γ_i と表す。γ_0 を上手く変形して γ_1 と貼り合うことを示せば、同様にして帰納的にすべて張り合わせることができる。

$x \in B_0 \cap B_1$ を一つとる。$\partial h : \partial(D^n \times I) \to \Omega_x$ を、$\partial h|_{D^n \times \{0\}} = \gamma_{0,x}$, $\partial h|_{D^n \times \{1\}} = \gamma_{1,x}$, $\partial h|_{(\partial D^n) \times I} = \alpha_x$ によって定める。ただし、$\gamma_{i,x}$ は γ_i と $\Omega(B_i) \to \Omega_x$ の合成である。$\Omega_x \to *$ が弱ホモトピー同値だから、次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 h が存在し、図式の上三角を可換にする。

$$\begin{tikzcd} \partial(D^n \times I) \cong S^n \arrow[r, "\partial h"] \arrow[d, hook] & \Omega_x \arrow[d] \\ D^n \times I \cong D^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}h"] & * \end{tikzcd}$$

Ω はしなやかだから、次の図式を可換にする H が存在する。

$$\begin{tikzcd} (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \cong D^n \times \{0\} \arrow[r, "\gamma_{0,x} \cup \alpha"] \arrow[d, hook] & \Omega([0,x]) \arrow[d] \\ D^n \times I \cong D^n \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}H"] & \Omega_x \end{tikzcd}$$

$\gamma_0' \overset{\mathrm{def}}{=} H(-,1) : D^n \to \Omega([0,x])$ と定めると、$\gamma_0'|_{S^{n-1}} = \alpha$, $\gamma_{0,x}' = \gamma_{1,x}$ である。ただし、$\gamma_{0,x}'$ は γ_0' と $\Omega([0,x]) \to \Omega_x$ の合成である。これにより、γ_0', γ_1 は上手く貼り合う。

Step.2 B がコンパクトで、区分的に線形な埋め込み $B \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する場合

n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ の時、Step.1 より成立。n で成立すると仮定して、$n+1$ で成立することを示す。

線形な射影 $\mathbb{R}^{n+1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ の B への制限を p とする。$p|_B$ は固有だから、$p(B)$ 上の層 $p_*\Omega$ はしなやかである。また、各 $x \in p(B)$ に対し、$p_*\Omega_x = \Omega(p^{-1}(x))$ である。帰納法の仮定より、$p_*\Omega_x = \Omega(p^{-1}(x))$ は弱可縮である。よって、$p_*\Omega$ に Step.1 を適用すれば、$\Omega(B) = p_*\Omega(p(B))$ は弱可縮である。

Step.3 一般の場合

コンパクトな部分複体の列 $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B$ で、$B = \bigcup B_k$ なるものをとる。各 B_k は区分的に線形な埋め込み $B_k \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ を持つので、$\Omega(B_k)$ は弱可縮である。Ω はしなやかだから、Serre ファイブレーションの列 $\cdots \to \Omega(B_1) \to \Omega(B_0)$ がとれる。Ω は層だから、$\Omega(B) = \varprojlim_k \Omega(B_k)$ である。よって、$\Omega(B)$ は弱可縮である。 □

定理 2.2.9. *B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（e.g. 多様体）、$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を B 上のしなやかな層とする。この時、射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について以下は同値である。*

(1) 任意の開集合 ${}^\forall U \subset B$ に対し、$f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ は弱ホモトピー同値である。

(2) 任意の点 $x \in B$ に対し、$f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ は弱ホモトピー同値である。

証明. • (1) ⇒ (2)

次のような四角形の可換図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_x \arrow[d, "f_x"] \\
D^n \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}
$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

1.5.27 より、十分小さい x の開近傍 U および二つの仮想的連続写像 $\tilde{\alpha} : S^{n-1} \to \mathcal{F}(U)$, $\tilde{\beta} : D^n \to \mathcal{G}(U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(U) \arrow[dr] \arrow[dd, "f_U"] & \\
S^{n-1} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}_x \arrow[dd, "f_x"] \\
 & \mathcal{G}(U) \arrow[dr] & \\
D^n \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}
$$

$f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ は弱ホモトピー同値であるから、次のような四角形の可換図式において、斜めに横断する射 $\tilde{\gamma}$ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "f_U"] \\
D^n \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\tilde{\gamma}"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}
$$

$D^n \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。

- (2) ⇒ (1)

各開集合 $U \subset B$ に対して、$P(\mathcal{G})(U) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{G}(U)^I$ とすると、$P(\mathcal{G})$ は層である。さらに、$\widetilde{\mathcal{F}}$ を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d, "f"] \\ P(\mathcal{G}) \arrow[r, "ev_0"'] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

ただし、ev_t は $\{t\} \subset I$ が導く射である。また、$I \twoheadrightarrow *$ が導く $\mathcal{G} \to P(\mathcal{G})$ と f の合成を μ として、ホモトピー同値 $id \times \mu : \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ が定まる。$\tilde{f} \overset{\text{def}}{=} ev_1 \circ pr_2 : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ とすると、次の可換図式ができる。

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ \mathcal{F} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

各 $\tilde{f}_U$ は Serre ファイブレーションである。よって、$\mathcal{G}$ がしなやかであることから、$\widetilde{\mathcal{F}}$ もしなやかであることが簡単にわかる。$\tilde{f}_U$ が弱ホモトピー同値であればよいが、ホモトピー長完全列を考えれば、$\tilde{f}_U$ のファイバーが弱可縮であればよい。そこで、$* \to \mathcal{G}(U)$ を一つ固定して、U 上の層 Ω を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{tikzcd} \Omega(W) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{F}}(W) \arrow[d, "\tilde{f}_W"] \\ * \arrow[r] & \mathcal{G}(W) \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ がしなやかであることと、各 $ev_0 : P(\mathcal{G})(U) \to \mathcal{G}(U)$ が Serre ファイブレーションであることから、Ω もしなやかであることが簡単にわかる。よって 2.2.8 に帰着される。 □

系 2.2.10. *B を σ-コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体（e.g. 多様体）、$\mathcal{F}$ を **vTop** に値を持つ B 上の層とする。$\mathcal{F}$ がしなやかならば、$\mathcal{F}$ はパラメトリック h-原理を満たす。*

2.2.3　非常にしなやか (very flexible) な層

定義 2.2.11. B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層または前層とする。

$\mathcal{F}$ が非常にしなやか *(very flexible)* または非常にフレキシブルであるとは、任意の二つの開集合 ${}^\forall U \subset^\forall V \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ が *Serre* ファイブレーションになることである。

命題 2.2.12. *B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。次は同値である。*

(1) $\mathcal{F}$ は非常にしなやかである。

(2) 各 $x \in B$ のある開近傍 U_x 上で $\mathcal{F}$ は非常にしなやかである。

証明. (1) ⇒ (2) は明らか。(2) ⇒ (1) を示す。
各 $x \in B$ のある開近傍 V_x 上で $\mathcal{F}$ は非常にしなやかであると仮定する。任意の二つの開集合 ${}^\forall U \subset^\forall V \subset B$ に対し、$U_x \overset{\text{def}}{=} U \cap V_x$ とおけば、次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(V_x) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(V_x \cap V_y) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}(U_x) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{F}(U_x \cap U_y)
\end{tikzcd}$$

□

命題 2.2.13. B をパラコンパクトかつ局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。次は同値である。

(1) $\mathcal{F}$ は非常にしなやかである。

(2) $\mathcal{F}$ はしなやかである。

(3) 各 $x \in B$ のある開近傍 U_x 上で $\mathcal{F}$ はしなやかである。

証明. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) は明らか。(3) ⇒ (1) を示す。
まず、B はパラコンパクトかつ局所コンパクトだから、相対コンパクトかつ局所有限な細分 $\{U_\lambda\}_\lambda$ で、各 U_λ 上で $\mathcal{F}$ がしなやかであるものがとれる。以上の準備の下、$\mathcal{F}$ が非常にしなやかであることを示す。
任意の二つの開集合 ${}^\forall V \subset^\forall W \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}(W) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

γ の存在を示せばよい。

$V_\lambda \overset{\text{def}}{=} U_\lambda \cap V$, $W_\lambda \overset{\text{def}}{=} U_\lambda \cap W$ とすると、$\{V_\lambda\}_\lambda$ は V の、$\{W_\lambda\}_\lambda$ は W の開被覆である。B は正規だから、同じ添え字をもつ開被覆 $\{V'_\lambda\}_\lambda$, $\{W'_\lambda\}_\lambda$ で、$V'_\lambda \Subset V_\lambda$, $W'_\lambda \Subset W_\lambda$ なるものがとれる。このとき、$\{cl(V_\lambda)\}_\lambda$ は V の、$\{cl(W_\lambda)\}_\lambda$ は W の局所有限な閉被覆である。1.4.12 より、次の図式の各行は差核である。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W) \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(cl(W_\lambda)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(cl(W_\lambda) \cap cl(W_\mu)) \arrow[d] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}(cl(V_\lambda)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{F}(cl(V_\lambda) \cap cl(V_\mu))
\end{tikzcd}$$

とくに、左側の四角形は引き戻しである。真ん中の列は Serre ファイブレーションだから、その引き戻しも Serre ファイブレーションである。 □

系 2.2.14. *B を局所コンパクトな距離化可能空間、$\mathcal{F}$ を* **hTop** *に値を持つ B 上の層とする。任意の開集合 $^\forall U \subset B$ に対して次は同値である。*

(1) $\mathcal{F}|_U$ は非常にしなやかである。

(2) $\mathcal{F}|_U$ はしなやかである。

(3) 各 $x \in B$ のある開近傍 $U_x \subset U$ 上で $\mathcal{F}$ はしなやかである。

2.2.4　再考：$\mathcal{F}^*$ の定義

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **vTop** に値を持つ B 上の層とする。

まず、B 上の前層 $\mathcal{F}^\square$ を $\mathcal{F}^\square(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U)^U$ によって定める。ここから出発して $\mathcal{F}^*$ の定義を見直す。

各開集合 $U \subset B$ に対し、被覆の圏 $Cov(U)$ が定まる。自己関手 $\mathcal{R} : Cov(U) \to Cov(U)$ を $\mathcal{R}(\{U_i \subset U\}) \stackrel{\text{def}}{=} \{U_i \cap U_j \subset U\}$ によって定める。この時、二つの標準的な自然変換 $\mathcal{R} \rightrightarrows Id$ が取れる。反変関手 $P^n = P^n_{\mathcal{F}^\square} : Cov(U)^{op} \to$ **vTop** を $P^1(\{U_i\}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \mathcal{F}^\square(U_i)$, $P^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} P^n \circ \mathcal{R}$ によって定める。これを用いて、$K = K_{\mathcal{F}^\square}$ を、図式 $P^1 \rightrightarrows P^2$ の差核として定める。以上の準備により、$\mathcal{F}^*(U) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim K|_{Cov(U)}$ と書ける。これはプラス構成そのものである。(c.f. 1.2.2) まとめると次の命題が成り立つ。

命題 2.2.15. $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^\square)^+$

これを踏まえ、一般に次の定義をする。

定義 2.2.16. B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。

$\mathcal{F}^\square$ の層化を $\mathcal{F}^*$ と書く。これを $\mathcal{F}$ の形式的な切断の層と呼ぶ。対比して、$\mathcal{F}$ を厳密な切断の層と呼ぶ。

もちろんこれは、$\mathcal{F}$ が **vTop** に値を持つとき、元の定義と一致する。

あるいは、**vTop** の時と全く同様に、次のように定義することもできる。

B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。

任意の位相空間 P に対し、$\mathcal{F}$ の P に関するパラメータ化 $\mathcal{F}^P$ とは、次のように定義される $B \times P$ 上の層である。

まず、$B \times P$ 上の開基系の上に前層 ${}^p\mathcal{F}^P$ が次のように定まる。

$$\text{各開集合 } U \subset B, R \subset P \text{ に対し、} {}^p\mathcal{F}^P(U \times R) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U)^R$$

${}^p\mathcal{F}^P$ の層化を $\mathcal{F}^P$ とすれば、これは開集合系に自然に拡張できる。

$\mathcal{F}^*$ は、対角射 $\Delta : B \to B \times B$ による $\mathcal{F}^B$ の引き戻しとして定義すればよい。これが上記のものと一致することを見るには、自然な射 $\mathcal{F}^\square \to \mathcal{F}^*$ が各茎で同型となることを見ればよい。命題 2.2.6 と全く同様に、次が成り立つ。

補題 2.2.17. B を局所有限な単体複体（*e.g.* 多様体）、$\mathcal{F}$ を $\mathbf{hTop}$ に値を持つ B 上の層とする。

1. $(\mathcal{F}^{\square})^{+}$ はしなやかかつ分離的な前層である。
2. $\Delta : \mathcal{F} \to (\mathcal{F}^{\square})^{+}$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \to (\mathcal{F}^{\square})^{+}_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

命題 2.2.18. B を局所コンパクトな正規ハウスドルフ空間、$\mathcal{F}$ を $\mathbf{hTop}$ に値を持つ B 上の前層とする。$\mathcal{F}$ がしなやかならば、$\mathcal{F}^{+}$ もしなやかである。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^{\forall}K \subset^{\forall} L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}^{+}(L) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\gamma"] & \mathcal{F}^{+}(K)
\end{tikzcd}$$

γ の存在を示せばよい。

2.2.6 と同様の議論により、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$（$U \subset W$）とそれぞれの開被覆 $\{U_x \subset U\}_{x \in U}$, $\{W_x \subset W\}_{x \in W}$（$x \in U_x \subset W_x$）および四つのホモトピー的射 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \to \mathcal{F}^{+}(W)$, $\tilde{\beta} : D^n \times I \to \mathcal{F}^{+}(U)$, $\bar{\alpha} : D^n \times \{0\} \to K(\{W_x\})$, $\bar{\beta} : D^n \times I \to K(\{U_x\})$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
K(\{W_x\}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}^{+}(W) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& D^n \times \{0\} \arrow[ul, "\bar{\alpha}"] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}^{+}(L) \arrow[dd] \\
K(\{U_x\}) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^{+}(U) \arrow[dr] & \\
& D^n \times I \arrow[ul, "\bar{\beta}"] \arrow[ur, "\tilde{\beta}"'] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F}^{+}(K)
\end{tikzcd}$$

ここで、$K(\{W_x\}), K(\{U_x\})$ は次の図式の各行が差核となるように定義されている。

$$\begin{tikzcd}
K(\{W_x\}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(W_x) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(W_x \cap W_y) \arrow[d] \\
K(\{U_x\}) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}(U_x) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod \mathcal{F}(U_x \cap U_y)
\end{tikzcd}$$

$x \notin U$ のとき、$\mathcal{F}(W_x) \to *$ は Serre ファイブレーションである。もしも $x \in U$ のとき $\mathcal{F}(W_x) \to \mathcal{F}(U_x)$ が Serre ファイブレーションならば、$\prod \mathcal{F}(W_x) \to \prod \mathcal{F}(U_x)$ は Serre ファ

イブレーションである。さらに、上図の左の四角は引き戻しだから、$K(\{W_x\}) \to K(\{U_x\})$ は Serre ファイブレーションであり、証明は終わる。

問題は、$x \in U$ のとき $\mathcal{F}(W_x) \to \mathcal{F}(U_x)$ が Serre ファイブレーションであるとは言えない点である。しかし、B は局所コンパクトな正規ハウスドルフ空間だから、相対コンパクトな開集合系 $\{U'_x \Subset U_x\}, \{W'_x \Subset W_x\}$（$x \in U'_x \subset W'_x$）がとれる。そこで、$\mathcal{F}(W_x) \to \mathcal{F}(U_x)$ のかわりに $\mathcal{F}(cl(W'_x)) \to \mathcal{F}(cl(U'_x))$($cl$ は閉包作用素) で置き換えれば、$\mathcal{F}$ がしなやかであるという仮定より、これは Serre ファイブレーションである。 □

以上を合わせて、命題 2.2.6 が拡張される。

命題 2.2.19. B を局所有限な単体複体（*e.g.* 多様体)、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。

1. 形式的な切断の層 $\mathcal{F}^*$ はしなやかである。
2. $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

証明.

1. $\mathcal{F}^*$ はしなやかである。

任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset^\forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}^*(L) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \mathcal{F}^*(K)
\end{tikzcd}$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.27 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K$, $W \supset L$（$U \subset W$）および二つの射 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \to \mathcal{F}^*(W)$, $\tilde{\beta} : D^n \times I \to \mathcal{F}^*(U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}^*(W) \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
D^n \times \{0\} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}^*(L) \arrow[dd] \\
 & \mathcal{F}^*(U) \arrow[dr] & \\
D^n \times I \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F}^*(K)
\end{tikzcd}$$

同様に、$\mathcal{F}^*$ の定義から、ある開被覆 $\{U_i \subset U\}, \{W_k \subset W\}$（$\{U_i\}$ は $\{U \cap W_k\}$ の細分。）および二つの射 $\bar{\alpha} : D^n \times \{0\} \to \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k))$, $\bar{\beta} : D^n \times I \to \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$

が存在して、次の図式を可換とする。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}^*(W) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& D^n \times \{0\} \arrow[ul, "\bar{\alpha}"] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{F}^*(L) \arrow[dd] \\
\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^*(U) \arrow[dr] & \\
& D^n \times I \arrow[ul, "\bar{\beta}"] \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F}^*(K)
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k))$, $\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$ は次の図式が差核となるように定義されている。

$$\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \to \prod \mathcal{F}^B(W_k \times W_k) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}^B((W_k \cap W_l) \times (W_k \cap W_l))$$
$$\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \to \prod \mathcal{F}^B(U_i \times U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}^B((U_i \cap U_j) \times (U_i \cap U_j))$$

そこで、次の合成によって $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta}_i$ を定める。

$$\bar{\alpha}_k : D^n \times \{0\} \stackrel{\bar{\alpha}}{\to} \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \to \prod \mathcal{F}^B(W_k \times W_k) \to \mathcal{F}^B(W_k \times W_k)$$
$$\bar{\beta}_i : D^n \times I \stackrel{\bar{\beta}}{\to} \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \to \prod \mathcal{F}^B(U_i \times U_i) \to \mathcal{F}^B(U_i \times U_i)$$

また、$\mathcal{F}^B$ の定義から、ある開被覆 $\{U_{ip} \subset U_i\}$, $\{W_{kq} \subset W_k\}$ および $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta}_i$ の持ち上げ $\bar{\bar{\alpha}}_k : D^n \times \{0\} \to K_{p_{\mathcal{F}^B}}(\{W_{kq}\})$, $\bar{\bar{\beta}}_i : D^n \times I \to K_{p_{\mathcal{F}^B}}(\{U_{ip}\})$ が存在して、次の図式を可換とする。

冪対象の普遍性により、これらはただ一つの $\alpha'_k : D^n \times \{0\} \times W_k \to \mathcal{F}(W_k)$, $\beta'_i : D^n \times I \times U_i \to \mathcal{F}(U_i)$ を導く。今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \to I$ で、K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、$\phi : D^n \times I \times U \to D^n \times I \times U$ を $\phi(x,t,v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x, t\delta(v), v)$ として定める。$W'_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_k - supp(\delta)$, $W_{k,i} \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_k \cap U_i$ とする。

$\gamma'_{k,i} : D^n \times I \times W_{k,i} \to \mathcal{F}(W_{k,i})$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \times W_{k,i} \stackrel{\phi}{\to} D^n \times I \times W_{k,i} \stackrel{\beta'_i}{\to} \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(W_{k,i})$$

冪対象の普遍性により、これらはただ一つの $\gamma_{k,i} : D^n \times I \to \mathcal{F}(W_{k,i})^{W_{k,i}}$ を導く。また、$\gamma_k : D^n \times I \to \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \twoheadrightarrow D^n \times \{0\} \stackrel{\alpha_k}{\to} \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \to \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$$

$\gamma_{k,i}$, γ_k 達は $\gamma : D^n \times I \to \mathcal{F}^B((\bigcup W_{k,i}) \cup (\bigcup W'_k)) \to \mathcal{F}^*(W) \to \mathcal{F}^*(L)$ を導く。これは、最初の図式を可換にする。

2. $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

$x \in B$ 周りで星形近傍をとることにより、x の近傍基 $^\exists\{U_0 \supset U_1 \supset \cdots \ni x\}$ および連続写像 $^\exists h : U_0 \times I \to U_0$ で、次を満たすものがとれる。

- $h(U_n \times I) \subset U_n$
- $h(x,t) = x$ （$^\forall t \in I$）
- $h(y,0) = y,\ h(y,1) = x$ （$^\forall y \in U_0$）

これを用いて、$H : \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \to \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ を、次の合成に対応する射として定義する。

$$\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \times U_n \overset{id\times h}{\to} \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times U_n \overset{\text{標準的な射}}{\to} \mathcal{F}(U_n)$$

これにより、$\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \to \mathcal{F}(U_n)^x \cong \mathcal{F}(U_n)$ は $\mathcal{F}(U_n) \to \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ のホモトピー逆射である。これらの順極限をとることにより、$\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^*_x (x \in B)$ はホモトピー同値であることがわかる。 □

2.2.5　圧縮可能性としなやかな層の特徴づけ

定義 2.2.20. B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。

部分集合 $B_0 \subset B$ に対し、$\mathcal{F}$ の B_0 上の変形 *(deformation)* とは、有限単体複体 P と射 $h : P \times I \to \mathcal{F}(B_0)$ の組 $h = (h, P)$ のことである。開集合 $U \subset B$ およびコンパクト集合 $K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ が K-圧縮可能 *(K-compressible)* であるとは、次を満たす $^\exists\tilde{h} : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ が存在することである。*(この* $\tilde{h}$ を h の K-圧縮 *(K-compression)* と呼ぶ。*)*

- $h|_{P\times\{0\}} = \tilde{h}|_{P\times\{0\}}$
- K を含む開集合 $^\exists U_0 \Subset U$ *(i.e.* $cl(U_0) \subset U$*)* が存在して、次の合成は $t \in I$ によらない。
$$P \times I \overset{\tilde{h}}{\to} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(U_0))$$
- K を含む開集合 $^\exists U_1 \subset U$ が存在して、次の二つの合成は一致する。
$$P \times I \underset{\tilde{h}}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_1)$$

命題 2.2.21. B を局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。$\mathcal{F}$ がしなやかであるための必要十分条件は、任意の開集合 $^\forall U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $^\forall K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形が K-圧縮可能であることである。

証明. $\mathcal{F}$ がしなやかであると仮定する。任意の開集合 $U \subset B$、任意のコンパクト集合 $K \subset U$ および $\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ をとる。これから示すのは、h が K-圧縮可能であることである。

開集合 $U_0, U_1 \subset U$ で、$K \subset U_1 \Subset U_0 \Subset U$ かつ $cl(U_0)$ がコンパクトなものをとる。B は正規空間だから、$cl(U_1)$ と ∂U_0 は開集合 $V_1 \supset cl(U_1)$ と $V_0 \supset \partial U_0$ によって分離可能である。(さらに $V_0, V_1 \subset U$ としてよい。) これにより $h' : P \times I \to \mathcal{F}(V_0 \coprod V_1) \cong \mathcal{F}(V_0) \times \mathcal{F}(V_1)$ が $P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V_1)$ と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V_0)$ の積として導かれる。$\mathcal{F}$ がしなやかであることから、h' は $cl(U_0)$ を含む開集合 $V \subset U$ 上に拡張できる。(i.e. $h' : P \times I \to \mathcal{F}(V)$ と見なせる。) これは次を満たすようにできる。

- $h|_{P \times \{0\}} = h'|_{P \times \{0\}}$
- 次の合成は $t \in I$ によらない。

$$P \times I \xrightarrow{h'} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V - cl(U_0))$$

- 次の二つの合成は一致する。

$$P \times I \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_1)$$

そこで、$\tilde{h}$ を h' と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(U_0))$ の貼り合わせとして定義すればよい。

逆に、任意の開集合 $U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形が K-圧縮可能であると仮定する。$\mathcal{F}$ がしなやかであることを示すため、任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset {}^\forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}(L) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \mathcal{F}(K)
\end{tikzcd}$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.27 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K$, $W \supset L$ ($U \subset W$) と次の図式を考えればよい。

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}(W) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta'"] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

β' の K-圧縮 $\tilde{\beta} : D^n \times I \to \mathcal{F}(U)$ をとる。K-圧縮の定義の $U_0 \Subset U$ をとる。$\gamma' : D^n \times I \to \mathcal{F}(W)$ を β' と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times \{0\} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(W - U_0)$ の貼り合わせとして定める。最後に、$P \times I \xrightarrow{\gamma'} \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(L)$ なる合成を γ とすればよい。 □

また、微小的しなやかな層も全く同様にして同様に特徴づけできる。

命題 2.2.22. B を局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。$\mathcal{F}$ が微小的しなやかであるための必要十分条件は、任意の開集合 ${}^{\forall}U \subset B$、任意のコンパクト集合 ${}^{\forall}K \subset U$ および $\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形 ${}^{\forall}h : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ に対し、${}^{\exists}\epsilon > 0$ で、$h|_{P\times[0,\epsilon]}$ が K-圧縮可能となるものが存在することである。

命題 2.2.23. B を局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。$\mathcal{F}$ が微小的しなやかであるならば、任意の開集合 ${}^{\forall}U \subset B$、任意のコンパクト集合 ${}^{\forall}K \subset U$ および $\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形 ${}^{\forall}h : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ に対し、${}^{\exists}\epsilon > 0$ および次を満たす ${}^{\exists}\tilde{h} : P \times I \to \mathcal{F}(U)$ が存在する。

- $h|_{P\times\{0\}} = \tilde{h}|_{P\times\{0\}}$
- K を含む開集合 ${}^{\exists}U_0 \Subset U$ が存在して、次の合成は $t \in [0,\epsilon]$ によらない。

$$P \times [0,\epsilon] \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(U_0))$$

- 次の二つの合成は一致する。

$$P \times I \underset{\tilde{h}}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(K)$$

さらに、K を含む開集合 ${}^{\exists}W \Subset U$ が存在して次の合成が $t \in I$ によらないならば、$U_0 \subset W$ で、$\tilde{h}$ についても同様としてよい。

$$P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(W))$$

証明. $\phi(s,t) \overset{\text{def}}{=} \min(1, s+t)$ として、$P \times I \times I \xrightarrow{id\times\phi} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U)$ なる合成を h' とおく。$\mathcal{F}$ は微小的しなやかだから、ある ${}^{\exists}\epsilon > 0$ が存在して $h'|_{P\times I\times[0,\epsilon]}$ は K-圧縮 $\tilde{h'}$ を持つ。

$$\psi(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} (0,t) & (t \leq \epsilon) \\ (t-\epsilon, \epsilon) & (otherwise) \end{cases}$$

として、$P \times I \xrightarrow{id\times\psi} P \times I \times [0,\epsilon] \xrightarrow{\tilde{h'}} \mathcal{F}(U)$ なる合成を $\tilde{h}$ とおけば条件を満たす。

□

一方、以下の条件は ϵ を U によらず選べるという意味で、微小的しなやかよりも強いことに注意する。(実際には圧縮可能性と同値である。)

定義 2.2.24. B を位相空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。

コンパクト集合 $K \subset B$ に対し、$\mathcal{F}$ の K 上の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(K)$ が K-微小圧縮可能 *(K-microcompressible)* であるとは、次を満たす ${}^{\exists}\epsilon > 0$ が存在することである。

- K を含む十分小さい開集合 $U \supset K$ および持ち上げ $h|_{P\times[0,\epsilon]} : P\times[0,\epsilon] \to \mathcal{F}(U)$ に対して、$h|_{P\times[0,\epsilon]}$ は K-圧縮可能である

命題 2.2.25. B を局所コンパクトな正規空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の層とする。任意のコンパクト集合 $^\forall K \subset B$ に対し $\mathcal{F}$ の K 上の任意の変形が K-微小圧縮可能ならば、$\mathcal{F}$ はしなやかである。

証明. 任意の開集合 $^\forall U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $^\forall K \subset U$ に対し、$\mathcal{F}$ の U 上の任意の変形 $^\forall h : P\times I \to \mathcal{F}(U)$ が K-圧縮可能であることを示せばよい。

$\phi(s,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \min(1, s+t)$ として、$P\times I\times I \overset{id\times\phi}{\to} P\times I \overset{h}{\to} \mathcal{F}(U)$ なる合成を h' とおく。$P\times I\times I \overset{h'}{\to} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(K)$ は K-微小圧縮可能だから、次を満たす $^\exists\epsilon > 0$ が存在する。

- K を含む十分小さい開集合 $U' \supset K$ に対して、$P\times I\times[0,\epsilon] \overset{h'}{\to} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ は K-圧縮 $\tilde{h}'$ をもつ。

$\psi_s(t) \overset{\mathrm{def}}{=} (s, t-s)$ として、$P\times[s,\phi(s,\epsilon)] \overset{id\times\psi_s}{\to} P\times I\times[0,\epsilon] \overset{\tilde{h}'}{\to} \mathcal{F}(U')$ なる合成を $\tilde{h}_s = \tilde{h}_s^{U'}$ とおく。$\tilde{h}_s$ は $h|_{P\times[s,\phi(s,\epsilon)]}$ の（U' 上の）K-圧縮である。

$N > \frac{1}{\epsilon}$ なる自然数 N を固定する。大雑把に言えば、$\tilde{h}_0, \tilde{h}_{\frac{1}{N}}, \cdots, \tilde{h}_{\frac{N-1}{N}}$ を貼り合わせて h の K-圧縮を構成したい。そこで、境界で上手く貼り合うように U' を小さくとりなおしていく必要がある。具体的には次のようにとる。

$\tilde{h}_0, \tilde{h}_{\frac{1}{N}}, \cdots, \tilde{h}_{\frac{i-1}{N}}$ まで貼り合わせて、$h|_{P\times[0,\frac{i}{N}]}$ の（U' 上の）K-圧縮 $\tilde{h}|_{P\times[0,\frac{i}{N}]}$ が構成できたとする。今、十分小さい $U'' \subset U'$ 上で $\tilde{h}|_{P\times\{\frac{i}{N}\}}$ と $h|_{P\times\{\frac{i}{N}\}}$ は一致する。そこで、この U'' について $\tilde{h}_{\frac{i}{N}} = \tilde{h}^{U''}_{\frac{i}{N}}$ をとる。$\tilde{h}|_{P\times\{\frac{i}{N}\}} = h|_{P\times\{\frac{i}{N}\}}$ と $\tilde{h}_{\frac{i}{N}}|_{P\times\{\frac{i}{N}\}}$ は（U'' 上で）一致する。$\tilde{h}_{\frac{i}{N}}$ は $U' - U''$ 上では $\tilde{h}|_{P\times\{\frac{i}{N}\}}$ と一致するように U' 上に拡張できる。これによって、$\tilde{h}|_{P\times[0,\frac{i}{N}]}$ と $\tilde{h}_{\frac{i}{N}}$ を貼り合わせて $\tilde{h}|_{P\times[0,\frac{i+1}{N}]}$ が構成できる。 □

2.2.6 鋭敏な変位 (sharply move)

定義 2.2.26. 位相空間 B と、**hTop** に値を持つ B 上の層 $\mathcal{F}$ の組 $(B,\mathcal{F})$ を h-層付き空間と呼ぶ。
$(B_i,\mathcal{F}_i)$ $(i=1,2)$ を h-層付き位相空間とする。射 $f : (B_1,\mathcal{F}_1) \to (B_2,\mathcal{F}_2)$ とは、連続写像 $f : B_1 \to B_2$ と、層の射 $f^\dagger : f^*\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ の組 $f = (f, f^\dagger)$ である。

$(B,\mathcal{F})$ を h-層付き空間とし、$Iso_{(B,\mathcal{F})}$ は $(B,\mathcal{F})$ 内で局所的に定義された同型からなる擬群とする。

定義 2.2.27. 部分擬群 $\mathfrak{D} \subset Iso_{(B,\mathcal{F})}$ および二つの開集合 $U \subset V \subset B$ に対し、$U \subset V$ の $\mathfrak{D}$-イソトピーとは、射 $d = \{d_t\}_{t\in I} : (U\times I, \mathcal{F}^I) \to (V,\mathcal{F})$ であって、$d_t \in \mathfrak{D}$ かつ d_0 は包含射 $U \subset V$ に一致するもののことである。ただし、$\mathcal{F}^I$ は $\mathcal{F}$ の I に関するパラメータ化である。

定義 2.2.28. B を位相空間とする。
相対閉集合とは、閉集合と開集合の共通部分のことである。
閉集合 $C \subset B$ が余次元 0 であるとは、$C = cl(int(C)) \neq \emptyset$ を満たすこととする。
閉集合 $C \subset B$ が余次元 1 以上であるとは、$B - C$ が稠密となることとする。

B は局所コンパクトな距離化可能空間とする。
$B_0 \subset B$ は相対閉集合、$S \subset B_0$ はコンパクト集合とする。$\mathfrak{J}$ はいくつか（無限個でもよい）の $\mathfrak{D}$-イソトピーからなる集合で、次を満たすとする。

$d : (U \times I, \mathcal{F}^I) \to (V, \mathcal{F})$ が $\mathfrak{J}$ に含まれるならば、$B_0 \subset U$ であり、B_0 は V の内部で閉集合である。

定義 2.2.29. $(\mathfrak{J}, S, B_0)$ が強変位類であるとは、B_0 を含む開集合 ${}^\exists\mathcal{U} = \mathcal{U}_{disp(\mathfrak{J},S,B_0)}$ が存在して、任意の ${}^\forall d \in \mathfrak{J}$ に対して次を満たすことである。

$$t \geq \frac{1}{2} \text{ならば、} d_t(S) \cap \mathcal{U} = \emptyset$$

定義 2.2.30. $(\mathfrak{J}, S, B_0)$ が鋭敏 *(sharp)* であるとは、S を含む任意の開集合 ${}^\forall W \supset S$ に対し、$\mathfrak{J}$ に含まれる ${}^\exists d : (U \times I, \mathcal{F}^I) \to (V, \mathcal{F})$ で次を満たすものが存在する。

- $W \Subset U$
- $d|_{U \times [\frac{1}{2}, 1]}$ および $d|_{U - cl(W) \times I}$ は t によらない。

定義 2.2.31. $(\mathfrak{J}, S, B_0)$ が鋭敏変位類であるとは、部分集合 ${}^\exists\mathfrak{J}_0 \subset \mathfrak{J}$ が存在して、$(\mathfrak{J}_0, S, B_0)$ が鋭敏な強変位類になることである。

B は局所コンパクトな距離化可能空間、$B_0 \subset B$ は相対閉集合、$K \subset B$ はコンパクト集合とする。K を含む任意の開集合 $W \subset B$ に対し、$K \cap B_0 \subset int(M) \Subset B_0$ なる余次元 0 のコンパクト集合 $M \subset W$ が存在し、そのような W, M に対し $\mathfrak{D}$-イソトピーからなる集合 ${}^\exists\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(W, M)$ で次を満たすものが存在すると仮定する。

$d : U \times I \to V$ が $\mathfrak{J}$ に含まれるならば、$B_0 \subset U \subset V \subset W$ であり、B_0 は V の内部で閉集合である。

補題 2.2.32. $\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の微小的しなやかな層とする。任意の W, M に対し $(\mathfrak{J}, \partial M, B_0)$ が鋭敏変位類ならば、$\mathcal{F}$ の K 上の任意の変形は K-微小圧縮可能である。

証明. $\mathcal{F}$ の K 上の任意の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(K)$ について考える。
この時、K を含む十分小さい開近傍 U_K 上への持ち上げ $h : P \times I \to \mathcal{F}(U_K)$ がとれる。$\mathcal{F}$ は微小的しなやかだから、${}^\exists\epsilon > 0$ で、$h|_{P \times [0,\epsilon]}$ が K-圧縮可能となるものが存在する。（この ϵ は U_K の取り方に依存する。）すなわち、$h|_{P \times [0,\epsilon]}$ の K-圧縮 ${}^\exists\tilde{h} : P \times [0, \epsilon] \to \mathcal{F}(U_K)$ が存在する。これは次を満たす。

- $h|_{P\times\{0\}} = \tilde{h}|_{P\times\{0\}}$
- K を含む開集合 $^\exists U_0 \Subset U_K$ が存在して、次の合成は $t \in [0,\epsilon]$ によらない。

$$P \times [0,\epsilon] \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{F}(U_K) \to \mathcal{F}(U_K - cl(U_0))$$

- 次の二つの合成は一致する。

$$P \times [0,\epsilon] \overset{h}{\underset{\tilde{h}}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(U_K) \to \mathcal{F}(K)$$

$K \subset W \subset U_K$ なる任意の開集合 W をとる。$h|_{P\times[0,\epsilon]}$ の W 上への持ち上げが K-圧縮可能であればよい。
2.2.23 より、ある $^\exists \delta \in (0,\epsilon)$ および $K \subset W_0 \subset U_0$ なる開集合 $^\exists W_0 \Subset W$ が存在して次の合成は $t \in [0,\delta]$ によらないとしてよい。

$$P \times [0,\delta] \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U - cl(W_0))$$

このとき、$K \cap B_0 \subset int(M) \Subset B_0$ なる余次元 0 のコンパクト集合 $M \subset W_0$ および $\mathfrak{D}$-イソトピーからなる集合 $^\exists \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(W_0, M)$ が存在し、$(\mathfrak{J}, \partial M, B_0)$ は鋭敏変位類である。強変位類であることから $^\exists \mathcal{U} = \mathcal{U}_{disp(\mathfrak{J},\partial M,B_0)}$ がとれる。また鋭敏であることから ∂M を含む開集合 $^\exists W_1 \subset \mathcal{U}$ で $W_0 - K \Supset W_1 \supset \partial M$ なるものに対し、$\mathfrak{J}$ に含まれる $^\exists d : U \times I \to V$ で次を満たすものがとれる。

- $t \geq \frac{1}{2}$ ならば、$d_t(\partial M) \cap \mathcal{U} = \emptyset$
- $W_1 \Subset U$, $W_1 \subset \mathcal{U}$
- $d|_{U\times[\frac{1}{2},1]}$ および $d|_{(U-cl(W_1))\times I}$ は t によらない。

$\phi(p,t) \overset{\text{def}}{=} (p, \min(t,\delta))$ として、$\hat{h} : P \times [0,\epsilon] \to \mathcal{F}(W)$ を次のように定める。

$$\hat{h} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} d^\dagger_{\frac{t}{\delta}} \circ \tilde{h} & (\text{on } W_0) \\ d^\dagger_{\frac{t}{\delta}} \circ \tilde{h} \circ \phi & (otherwise) \end{cases}$$

□

定義 2.2.33. 相対閉集合 $B_0 \subset B$ が $\mathfrak{D}$ によって鋭敏に変動する *(sharply movable)* とは、各 $x \in B_0$ に対して B_0 上余次元 0 のコンパクト閉近傍からなる基本近傍基 $\mathcal{N}(x)$ が対応し、次を満たす。

x の任意の開近傍 $U_x \subset B$ で、$U_x \cap B_0 \subset U_x$ が閉集合となるものに対し、次が成立する。

- U_x に含まれる任意のコンパクト集合 $K \subset U_x$ に対し、ある $M \in \mathcal{N}(x)$ が存在して、$K \cap B_0 \subset int(M) \Subset U_x \cap B_0$ を満たす。
- U_x に含まれる任意の $M \in \mathcal{N}(x)$ に対し、$\mathfrak{D}$-イソトピーからなる集合 $^\exists \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(x, U_x, M)$ が存在し、$(\mathfrak{J}, \partial M, U_x \cap B_0)$ は鋭敏な強変位類である。
- 任意の $d \in \mathfrak{J}$ に対し、$supp(d) \subset U_x$

定理 2.2.34. B を局所コンパクトな距離化可能空間、$\mathcal{F}$ を **hTop** に値を持つ B 上の微小的しなやかな層とする。相対閉集合 $B_0 \subset B$ が $\mathfrak{D}$ によって鋭敏に変動するならば、ある B_0 を含む開集合 $U \supset B_0$ 上で $\mathcal{F}$ はしなやかである。

証明. 各 $x \in B_0$ のある開近傍 $U_x \subset B$ 上で $\mathcal{F}$ がしなやかであることを示せばよい。すなわち、そのような U_x 上で、任意のコンパクト集合 $^\forall K \subset U_x$ に対し $\mathcal{F}$ の K 上の任意の変形が K-微小圧縮可能であることを示せばよい。

$B_0 \subset B$ が $\mathfrak{D}$ によって鋭敏に変動するので、各 $x \in B_0$ に対して B_0 上余次元 0 の閉近傍からなる基本近傍基 $\mathcal{N}(x)$ が対応し、上記の定義の条件を満たす。x の任意の開近傍 $U_x \subset B$ で、$U_x \cap B_0 \subset U_x$ が閉集合となるものを一つとる。
$\mathcal{F}$ の $K \subset U_x$ 上の任意の変形 $h : P \times I \to \mathcal{F}(K)$ について考える。この時、K を含む十分小さい開近傍 $U_K \subset U_x$ 上への持ち上げ $h : P \times I \to \mathcal{F}(U_K)$ がとれる。
$\mathcal{F}$ は微小的しなやかだから、$^\exists \epsilon > 0$ で、$h|_{P \times [0,\epsilon]}$ が K-圧縮可能となるものが存在する。（この ϵ は U_K の取り方に依存する。）すなわち、$h|_{P \times [0,\epsilon]}$ の K-圧縮 $^\exists \tilde{h} : P \times [0, \epsilon] \to \mathcal{F}(U_K)$ が存在する。
$K \subset W \subset U_K$ なる任意の開集合 W をとる。$h|_{P \times [0,\epsilon]}$ の W 上への持ち上げがが K-圧縮可能であればよい。
W について

$K \cap B_0 \subset U_x$ はコンパクトだから、ある $M \in \mathcal{N}(x)$ が存在して、$K \cap B_0 \subset int(M) \Subset U_x \cap B_0$ を満たす。この M に対し、$\mathfrak{D}$-イソトピーからなる集合 $^\exists \mathfrak{J}$ が存在し、$(\mathfrak{J}, \partial M, U_x \cap B_0)$ は鋭敏な強変位類である。
すなわち、$U_x \cap B_0$ を含む開集合 $^\exists \mathcal{U} = \mathcal{U}_{disp(\mathfrak{J}, \partial M, B_0)}$ が存在して、任意の $^\forall d \in \mathfrak{D}$ に対して次を満たす。

$$t \geq \frac{1}{2} \text{ならば、} d_t(\partial M) \cap \mathcal{U} = \emptyset$$

□

2.3　応用

2.3.1　ジェット束と層理論的 h-原理

$f: E \to B$ を滑らかなファイバー束、$R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。

命題 2.3.1. $\Gamma(-;R)$ はしなやかである。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 ${}^\forall K \subset {}^\forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \Gamma(L;R) \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "{}^\exists\gamma"] & \Gamma(K;R)
\end{tikzcd}
$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.27 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$（$U \subset W$）および二つの擬連続写像 $\tilde{\alpha}: D^n \times \{0\} \to \Gamma(W;R), \tilde{\beta}: D^n \times I \to \Gamma(U;R)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$
\begin{tikzcd}
 & \Gamma(W;R) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
D^n \times \{0\} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & \Gamma(L;R) \arrow[dd] \\
 & \Gamma(U;R) \arrow[dr] & \\
D^n \times I \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \Gamma(K;R)
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{\alpha}': D^n \times \{0\} \times W \to R, \tilde{\beta}': D^n \times I \times U \to R$ を $\tilde{\alpha}'(x,0,p) \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\alpha}(x,0)(p), \tilde{\beta}'(x,t,p) \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\beta}(x,t)(p)$ で定めると、これは連続である。

今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta: U \to I$ で、K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、$\phi: D^n \times I \times U \to D^n \times I \times U$ を $\phi(x,t,p) \overset{\mathrm{def}}{=} (x, t\delta(p), p)$ として定める。また、$W' \overset{\mathrm{def}}{=} W - supp(\delta)$ として、$\psi: D^n \times I \times W' \to D^n \times \{0\} \times W'$ を $\psi(x,t,p) \overset{\mathrm{def}}{=} (x,0,p)$ として定める。$\tilde{\beta}' \circ \phi$ と $\tilde{\alpha}' \circ \psi$ は上手く貼り合って、$\tilde{\gamma}': D^n \times I \times W \to R$ を定める。$\tilde{\gamma}: D^n \times I \to \Gamma(W;R)$ を $\tilde{\gamma}(x,t)(p) \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\gamma}'(x,t,p)$ で定め、$D^n \times I \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \Gamma(W;R) \to \Gamma(R,L)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。 □

各開集合 $U \subset B$ に対し、$\tau': Sol(U;R)^U \to \Gamma(U;R)$ を次のように定める。各 $s \in Sol(U;R)^U$ は、連続写像 $s: U \times U \to E; (x,y) \mapsto s^x(y)$ で、任意の x に対して $s^x \in Sol(U;R)$ なるものである。$j^r s: U \times U \to R$ を、$j^r s(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} j^r(s^x)(y)$ によって定めると、これは連続である。そこで、対角写像 $U \to U \times U$ と $j^r s$ の合成を $\tau'(s): U \to R$ とする。

τ' の集まりは $\tau : Sol(-;R)^* \to \Gamma(-;R)$ を導く。これは、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
Sol(-;R)^* \arrow[r, "\tau"] & \Gamma(-;R) \\
Sol(-;R) \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

命題 2.3.2. R は開とする。任意の開集合 $^\forall U \subset B$ に対し、$\tau_U : Sol(U;R)^* \to \Gamma(U;R)$ は弱ホモトピー同値である。

証明. 2.2.9 より、任意の $\forall p \in B$ に対し、$\tau_p : Sol(p;R)^* \to \Gamma(p;R)$ が弱ホモトピー同値であることを示せばよい。そのため、$\tau_p \circ \Delta_p : Sol(p;R) \to \Gamma(p;R)$ が弱ホモトピー同値であることを示せばよい。次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & Sol(p;R) \arrow[d] \\
D^n \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "^\exists\gamma"] & \Gamma(p;R)
\end{tikzcd}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

1.5.27 より、十分小さい p の開近傍 U および二つの擬連続写像 $\tilde{\alpha} : S^{n-1} \to Sol(U;R)$, $\tilde{\beta} : D^n \to \Gamma(U;R)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
& Sol(U;R) \arrow[dr] \arrow[dd, hook] & \\
S^{n-1} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & Sol(p;R) \arrow[dd] \\
& \Gamma(U;R) \arrow[dr] & \\
D^n \arrow[ur, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, "\beta"] & & \Gamma(p;R)
\end{tikzcd}$$

U を座標近傍としてとれば、$U \subset \mathbb{R}^m$ としてよい。各 $x \in D^n$ に対して $\tilde{\beta}(x)(p) = j^r_p s^x \in R$ と表す。R は開だから、U を小さく取り直せば $x \mapsto (q \mapsto j^r_q s^x)$ は再び $D^n \to \Gamma(U;R)$ を定める。さらに U を小さく取り直せばこれは $\tilde{\beta}$ とホモトピックである。$\tilde{\gamma} : D^n \to Sol(U;R)$ を $\tilde{\gamma}(x) \overset{\text{def}}{=} s^x$ で定め、$D^n \xrightarrow{\tilde{\gamma}} Sol(U;R) \to Sol(p;R)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。 □

注意 2.3.3. 上の証明において、R が開であるという条件は、任意の $j^r_p s \in R$ を初期値とする局所解 $s \in Sol(p;R)$ の存在（および初期値に対する連続性）を保証している。すなわち、そのような局所解を常に持つ場合、R が開でなくとも上の性質および以下の系は成り立つ。

系 2.3.4. R は開とする。

層 $Sol(-;R)$ が h-原理を満たすための必要十分条件は、R が任意の開集合 $U \subset B$ 上で h-原理を満たすことである。

層 $Sol(-;R)$ がパラメトリック h-原理を満たすための必要十分条件は、R が任意の開集合 $U \subset B$ 上でパラメトリック h-原理を満たすことである。

関連図書

[1] John Baez and Alexander Hoffnung. Convenient categories of smooth spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(11):5789–5825, 2011.

[2] P Frejlich. *h-principles around Poisson geometry*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Instituto Superior Tecnico, 2011.

[3] Misha Gromov. *Partial differential relations*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Ivan Kolár, Jan Slovák, and Peter W Michor. Natural operations in differential geometry. 1999.

[5] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] G Sardanashvily. Fibre bundles, jet manifolds and lagrangian theory. lectures for theoreticians. *arXiv preprint arXiv:0908.1886*, 2009.

[7] Dannie J Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142. Cambridge University Press, 1989.