

h-原理 (h-principle)

山崎 晃司 東京工業大学

平成 31 年 10 月 29 日

記号一覧

Set: 集合と写像の圏

Top: 位相空間と連続写像の圏

\mathcal{CH} : コンパクトハウスドルフ空間と連続写像の圏

\mathcal{PCH} : 局所コンパクトかつパラコンパクトなハウスドルフ空間と連続写像の圏

Mfd: 滑らかな多様体と滑らかな写像の圏

$Sh(\mathcal{U}) = Sh(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$: (集合を値に持つ) \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏

$Sh(\mathcal{U}; \mathcal{C})$: \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏

$CPSH(\mathcal{U})$: \mathcal{U} 上の具体前層と自然変換の圏

$CSH(\mathcal{U})$: \mathcal{U} 上の具体層と自然変換の圏

qTop: 擬位相空間と擬連続写像の圏

vTop: 仮想的位相空間と仮想的連続写像の圏

hTop: ホモトピー的対象とホモトピー的射の圏

\mathcal{U}_U : \mathcal{U} の U 上のスライス圏

$Nat(-, -)$: 自然変換の集合

目次

第0章 導入

Gromov の “Partial Differential Relations” [?] を読んで勉強したことをまとめる予定です。部分的に [?] などを参考にする予定です。

第1章 一般化された位相空間とホモトピー

h-原理の基本的な考え方は次のようなものである。何らかの微分方程式または微分不等式の解を得るため、まずはその“形式的な”解を用意する。そのあとで、実はそれがホモトピーによって厳密解へと変形できることを示すのである。そのため、写像空間に上手く“位相”を入れて“ホモトピー論”を展開したい。写像空間への位相の入れ方は、たとえばコンパクト開位相などが知られているが、この取り扱いは非常に繊細で、適用できる状況は多くない。そこで、厳密な意味での“位相”を入れることは諦めて、十分都合のいい“連続写像”のクラスを与えるという方法で、位相空間の概念を拡張する。

1.1 グロタンディーク位相と景

まずはグロタンディーク位相と景について復習しておく。トポスなどは扱わない。詳しく知りたい方は[?]などを読むとよいかもしれない。

定義 1.1.1. \mathcal{U} は圏とする。 \mathcal{U} 上のグロタンディーク位相 (*Grothendieck topology*) とは、各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、射の族からなる集合 \mathcal{T}_U を与える写像であって、次の公理を満たすものである。

1. $\phi \in \mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ ならば、 $\text{cod}(\phi) = U$ である。
2. $\phi: V \rightarrow U$ が同型射ならば、 $\{\phi\} \in \mathcal{T}_U$ である。
3. $\{V_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ ならば、 \mathcal{U} 上の各射 $W \rightarrow U$ に対し、ファイバー積 $V_i \times_U W$ が存在して $\{V_i \times_U W \rightarrow W\}_i \in \mathcal{T}_W$ を満たす。
4. $\{V_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ かつ $\{W_{ij} \rightarrow V_i\}_j \in \mathcal{T}_{V_i}$ ならば、 $\{W_{ij} \rightarrow V_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \mathcal{T}_U$ である。

この時、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ を U の被覆 (*covering*) と呼ぶ。グロタンディーク位相を備えた圏のことを景 (*site*) と呼ぶ。

注意 1.1.2. 景と言ったときには有限完備性を仮定することが多い。しかし、後で使いたいいくつかの例は有限完備でない。

例 1.1.3. ある位相空間の開集合系を \mathcal{U}_{top} とすると、これは包含関係を射として圏となる。ここに、普通の意味での開被覆を被覆として定義すればグロタンディーク位相が定まり、 \mathcal{U}_{top} は景となる。

例 1.1.4. **Set** は、集合と写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Set})$ に対し

Set 上の射の族 $\{f_i : A_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \coprod f_i : \coprod A_i \rightarrow X$ は全射である。

とすることにより、**Set** 上に景の構造が定まる。

例 1.1.5. **Top** は、位相空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Top})$ に対し

Top 上の射の族 $\{f_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 f_i は開埋め込みで、 $\coprod f_i : \coprod U_i \rightarrow X$ は全射である。

とすることにより、**Top** 上に景の構造が定まる。

または、各 $X \in Ob(\mathbf{Top})$ に対し

Top 上の射の族 $\{f_i : F_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 f_i は閉埋め込み、 I は有限で、 $\coprod f_i : \coprod F_i \rightarrow X$ は全射である。

とすることにより、**Top** 上に別の景の構造が定まる。

例 1.1.6. \mathcal{CH} は、コンパクトハウスドルフ空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathcal{CH})$ に対し

\mathcal{CH} 上の射の族 $\{f_i : A_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} I$ は有限で、 $\coprod f_i : \coprod A_i \rightarrow X$ は全射である。

とすることにより、 \mathcal{CH} 上に景の構造が定まる。

例 1.1.7. \mathcal{PCH} は、局所コンパクトかつパラコンパクトなハウスドルフ空間と連続写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathcal{PCH})$ に対し

\mathcal{PCH} 上の射の族 $\{f_i : A_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 A_i はコンパクトで、 $\{Im(f_i)\}_{i \in I}$ が X の局所有限被覆である。

とすることにより、 \mathcal{PCH} 上に景の構造が定まる。

例 1.1.8. **Mfd** は、滑らかな多様体と滑らかな写像の圏とする。各 $X \in Ob(\mathbf{Mfd})$ に対し

Mfd 上の射の族 $\{f_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が X の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 f_i は開埋め込みで、 $\coprod f_i : \coprod U_i \rightarrow X$ は全射である。

とすることにより、**Mfd** 上に景の構造が定まる。

例 1.1.9. \mathcal{U} は景とする。各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 U 上のスライス圏を \mathcal{U}_U とする。すなわち、次のように対象と射を定義する。 \mathcal{U}_U の対象は \mathcal{U} 上の射 $V \rightarrow U$ である。 \mathcal{U}_U の射 $(V \rightarrow U) \rightarrow (W \rightarrow U)$ は \mathcal{U} 上の射 $V \rightarrow W$ であり、次の図式を可換とするものである。

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ & \searrow & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

各 $V \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$ に対し、

\mathcal{U}_U 上の射の族 $\{V_i \rightarrow V\}_{i \in I}$ が V の被覆である。

$\stackrel{\text{def}}{=} \{V_i \rightarrow V\}_{i \in I}$ は \mathcal{U} 上の被覆である。

とすることにより、 \mathcal{U}_U 上に景の構造が定まる。

1.2 景上の層

1.2.1 層

定義 1.2.1. \mathcal{U} は景とする。(集合を値に持つ) \mathcal{U} 上の前層 (presheaf) とは、反変関手 $\mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ のことである。

(集合を値に持つ) \mathcal{U} 上の層 (sheaf) とは、 \mathcal{U} 上の前層 $\mathcal{F} : \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ であって、次の張り合わせ条件を満たすものである。

$\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば、次の図式は差核 (equalizer) である。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

景 \mathcal{U} に対し、 \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏を $Sh(\mathcal{U})$ と書く。

\mathcal{F}, \mathcal{G} を \mathcal{U} 上の前層とする。各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Nat}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_U}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U})$ とする。ただし、 $\text{Nat}(-, -)$ は自然変換全体からなる集合である。これにより、前層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が定まる。

命題 1.2.2. \mathcal{G} が層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も層である。

証明. 次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \rightarrow \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i) \xrightleftharpoons[r_2]{r_1} \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i \times_U U_j)$$

$(f_i) \in \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i)$ について、 $r_1((f_i)) = r_2((f_i))$ を仮定する。任意の $\forall V = (V \rightarrow U) \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$ をとり、 $V_i \stackrel{\text{def}}{=} V \times_U U_i$ とする。この時、次の図式を可換にするただ一つの射

$f_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(V_i \times_V V_j) \\ \downarrow f_V & & \downarrow \prod f_{i, V_i} & & \downarrow \prod f_{i, V_i \times_V V_j} \\ \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{G}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{G}(V_i \times_V V_j) \end{array}$$

これにより、ただ一つの自然変換 $f \in \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ が定まる。 \square

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を \mathcal{U} 上の前層とする。各自然変換 $f : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ に対し、 $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ を次のように定義する。

各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$, $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し、 $g = \hat{f}_U(s) : \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U} \rightarrow \mathcal{H}|_{\mathcal{U}_U}$ を定義したい。これを、各 $V \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$, $t \in \mathcal{G}(V)$ に対し、 $g_V(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(r_{V \rightarrow U}(s), t)$ によって定義する。

命題 1.2.3. $f \mapsto \hat{f}$ なる対応により、 $\text{Nat}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \text{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^{\mathcal{G}})$ である。

証明. 逆の対応を作ればよい。これは、各自然変換 $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ に対して、 $f_U(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{f}_U(s))_U(t)$ とすれば作れる。 \square

注意 1.2.4. 層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が \mathbf{Set} に値を持つためには、景 \mathcal{U} が小さい景である必要がある。“小さい”とは、グロタンディーク宇宙に含まれるということ。景 \mathcal{U} が大きい景の場合、グロタンディーク宇宙を少なくとも二つ取ることで、 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ は \mathbf{Set} に値を持つと見なせる。

1.2.2 プラス構成と層化

景上でも前層の層化を考えることができる。ここでは一般の圏 \mathcal{C} に値を持つ層と前層について考察したい。 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏を $Sh(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書くことにする。特に、 $Sh(\mathcal{U}) = Sh(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ である。

定義 1.2.5. 圏 \mathcal{C} が帰納極限-積交換性質または IPC 性質 (*inductive-limit-product commutation property*) を満たすとは、任意の余フィルター図式の族 $\{\alpha_s : I_s \rightarrow \mathcal{C}\}_s$ に対し、カノニカルな射 $\varinjlim (\prod I_s \xrightarrow{(i_s) \mapsto \prod \alpha_s(i_s)} \prod \mathcal{C}) \rightarrow \prod (\varinjlim \alpha_s)$ が同型射となることである。

以下、圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。その上で、前層及び層は圏 \mathcal{C} を値を持つとする。

定義 1.2.6. 景 \mathcal{U} 上の前層 $\mathcal{F} : \mathcal{U}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ が分離的 (*separated*) であるとは、 $\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば $\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)$ は単射となることである。

これから、前層の“拡張”を定義し、“拡張”を二重に取ったものが層化となることを示す。

まず、 \mathcal{U} 上の被覆の圏 $Cov_{\mathcal{U}}$ を定義する。対象はもちろん \mathcal{U} 上の被覆であり、二つの被覆 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$, $\{V_j \rightarrow V\}_{j \in J}$ の間の射 $f : \{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \rightarrow \{V_j \rightarrow V\}_{j \in J}$ とは、添え

字の写像 $\tau : I \rightarrow J$ と \mathcal{U} 上の射の族 $f_i : U_i \rightarrow V_{\tau(i)}$ および $f' : U \rightarrow V$ の組で、次の図式を可換とするものである。

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U \\ \downarrow f_i & & \downarrow f' \\ V_{\tau(i)} & \longrightarrow & V \end{array}$$

すると、忘却関手 $\mathcal{P} : \text{Cov}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ が $\mathcal{P}(\{U_i \rightarrow U\}_i) \stackrel{\text{def}}{=} U$ として定まる。これにより、各対象 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ の被覆の圏 $\text{Cov}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}^{-1}(U)$ が定まる。 \mathcal{U} 上の射 $f : V \rightarrow U$ が存在した時、制限関手 $f^* : \text{Cov}(U) \rightarrow \text{Cov}(V)$ が $f^*(\{U_i \rightarrow U\}_i) \stackrel{\text{def}}{=} (\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i)$ によって定まる。

$\text{Cov}(U)$ 上で射 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \rightarrow \{V_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ が存在するとき、 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ は $\{V_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ の細分 (refinement) であるという。

\mathcal{F} は \mathcal{U} 上の前層とする。 \mathcal{U} 上の前層 \mathcal{F}^+ を次のように定義する。

自己関手 $\mathcal{R} : \text{Cov}_{\mathcal{U}} \rightarrow \text{Cov}_{\mathcal{U}}$ を $\mathcal{R}(\{U_i \rightarrow U\}) \stackrel{\text{def}}{=} \{U_i \times_U U_j \rightarrow U\}$ によって定める。この時、二つの標準的な自然変換 $\mathcal{R} \Rightarrow \text{Id}$ が取れる。反変関手 $P^n = P_{\mathcal{F}}^n : \text{Cov}_{\mathcal{U}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ を $P^1(\{U_i\}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \mathcal{F}(U_i)$, $P^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} P^n \circ \mathcal{R}$ によって定める。これを用いて、 $K = K_{\mathcal{F}}$ を、図式 $P^1 \Rightarrow P^2$ の差核として定める。そこで、 $\mathcal{F}^+(U) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim K|_{\text{Cov}(U)}$ とする。これはすなわち、 $\text{Cov}(U)$ で細分をとり続けた極限である。

さらにこの時、標準的な射 $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ が、自然な射 $\mathcal{F}(U) \rightarrow K_U(\{U \xrightarrow{\text{id}} U\}) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ より導かれる。

このような構成をプラス構成 (plus construction) という。

命題 1.2.7. \mathcal{F}^+ は分離的である。

証明. $\{U_i \rightarrow U\}_i$ を被覆とする。 $\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ が単射であればよい。

$\prod \text{Cov}(U_i) \rightarrow \text{Cov}(U)$ は共終である。よって、 $\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K|_{\prod \text{Cov}(U_i)}$ が成り立つ。 $\forall (\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) \in \text{Ob}(\prod \text{Cov}(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} K(\{V_{ij} \rightarrow U\}) & \longrightarrow & P^1(\{V_{ij} \rightarrow U\}) & \rightrightarrows & P^2(\{V_{ij} \rightarrow U\}) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ \prod K(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) & \longrightarrow & \prod P^1(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) & \rightrightarrows & \prod P^2(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) \end{array}$$

図式の順極限をとると、IPC 性質と差核とフィルター余極限が交換することから、 $\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ は単射である。□

命題 1.2.8. \mathcal{F} は分離的であると仮定すると、 \mathcal{F}^+ は層である。

証明. $\{U_i \rightarrow U\}_i$ を被覆とする。次の図式が差核であることを示せばよい。

$$\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i) \xrightleftharpoons[r_2]{r_1} \prod \mathcal{F}^+(U_i \times_U U_j)$$

$\forall (\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \in \text{Ob}(\prod \text{Cov}(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod P^2(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \xrightarrow{\cong} & \prod P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & \xleftarrow{\text{単射}} & P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\}) \\
 \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\
 \prod P^1(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \xrightarrow{\cong} & \prod P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & \xlongequal{\quad} & P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \prod K(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \xrightarrow{\cong} & \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & \xleftarrow{\text{単射}} & K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\})
 \end{array}$$

\mathcal{F} が分離的であることから、図式の右上の射が単射である。図式 $\prod K(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \rightarrow \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\})$ の差核を $K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\})$ とすると、図式追跡により $K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \rightarrow K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\})$ が導かれる。また、 $K(\{V_{ik} \rightarrow U\}) \rightarrow K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\})$ であることも容易にわかる。よって、 $\mathcal{F}^+(U) = \lim_{\rightarrow} K'|_{\prod \text{Cov}(U_i)}$ である。すなわち、初めの図式は差核である。 \square

命題 1.2.9. 任意の前層 \mathcal{F} と層 \mathcal{G} および射 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}^+ \\
 & \searrow \mu & \downarrow \mu^+ \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

証明. 各対象 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 $\mu_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を次のように定める。

$\forall (\{U_i \rightarrow U\}) \in \text{Ob}(\text{Cov}(U))$ について、次の図式を可換にする $\mu'_{\{U_i \rightarrow U\}}$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
 K(\{U_i \rightarrow U\}) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \\
 \mu'_{\{U_i \rightarrow U\}} \downarrow \dots & & \downarrow \prod \mu_{U_i} & & \downarrow \prod \mu_{U_i \times_U U_j} \\
 \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod \mathcal{G}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & \prod \mathcal{G}(U_i \times_U U_j)
 \end{array}$$

これらは、ただ一つの $\mu_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を導く。 \square

系 1.2.10. 任意の前層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F}^{++} は層である。

さらに、別の層 \mathcal{G} と射 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^{++} : \mathcal{F}^{++} \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\nu^2} & \mathcal{F}^{++} \\
 & \searrow \mu & \downarrow \mu^{++} \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

定理 1.2.11. 反映的部分圏 $Sh(\mathcal{U}) \subset \mathbf{Set}^{\mathcal{U}^{op}}$ の包含関手は任意の極限を創出し、 $Sh(\mathcal{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

証明. 前層が層であるための条件は、次の形の図式が差核となることである。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

任意の極限は極限と可換なので、特に差核および積とも可換である。よって、包含関手は任意の極限を創出する。よって $Sh(\mathcal{U})$ は完備であり、反映的であることから余完備である。また、冪対象を持つことからデカルト閉圏である。□

1.3 具体景と具体層

1.3.1 具体景と具体層

定義 1.3.1. 景 \mathcal{U} が具体景 (*concrete site*) であるとは、 \mathcal{U} が終対象 $*$ を持ち、次の条件を満たすことである。

1. 共変関手 $Hom_{\mathcal{U}}(*, -) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ は忠実である。
2. $\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば、 $\coprod Hom_{\mathcal{U}}(*, U_i) \rightarrow Hom_{\mathcal{U}}(*, U)$ は全射である。

\mathcal{U} は具体景とする。各 $U \in Ob(\mathcal{U})$ に対し、 $\tilde{U} \stackrel{\text{def}}{=} Hom_{\mathcal{U}}(*, U)$ を U の基底集合 (base set) と呼ぶ。 \mathcal{U} 上の各射 $f : U \rightarrow V$ に対し、 $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} Hom_{\mathcal{U}}(*, f) : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ を f の基底写像 (base map) と呼ぶ。これらを踏まえ、共変関手 $Hom_{\mathcal{U}}(*, -) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手と呼ぶ。

具体景の定義の一つ目の条件は、忘却関手が忠実であるということである。よって、 \mathcal{U} 上の射の一致を見るためには、その基底写像が一致することを確かめればよい。

二つ目の条件は、忘却関手が \mathcal{U} 上の被覆を \mathbf{Set} 上の被覆へ移すということである。これにより、 \mathbf{Set} 上の任意の層は忘却関手により \mathcal{U} 上の層へと引き戻される。

例 1.3.2. \mathbf{Top} , \mathbf{Set} , \mathcal{CH} , \mathcal{PH} , \mathbf{Mfd} はすべて具体景である。

\mathcal{U} は具体景とし、 \mathcal{F} は \mathcal{U} 上の前層とする。この時、各 $x \in \tilde{U} = Hom_{\mathcal{U}}(*, U)$ に対し、制限写像 $r_x : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(*)$ が定まる。そこで、 $\tilde{\mathcal{F}}_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*))$ を、 $\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) \stackrel{\text{def}}{=} r_x(s)$ によって定義する。

定義 1.3.3. \mathcal{U} は具体景とし、 \mathcal{F} は \mathcal{U} 上の前層とする。

\mathcal{F} が具体前層 (*concrete presheaf*) であるとは、各 $U \in Ob(\mathcal{U})$ に対し、 $\tilde{\mathcal{F}}_U$ が単射となることである。

具体前層が層でもある時、これを具体層 (*concrete sheaf*) と呼ぶ。

\mathcal{F} は \mathcal{U} 上の具体前層とする。 $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(*)$ を \mathcal{F} の基底集合と呼ぶ。このとき、 \mathcal{F} は自然な埋め込み $\tilde{\mathcal{F}}$ によって、 \mathcal{U} 上の層 $Hom_{\mathbf{Set}}(-, X)$ の部分前層とみなせる。そこで、具体前層を集合 X と層 $Hom_{\mathbf{Set}}(-, X)$ の部分前層 $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}$ の組 (X, \mathcal{F}_X) であって、 $\tilde{\mathcal{F}}_* : \mathcal{F}(*) \rightarrow Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{*, \mathcal{F}(*)})$ が同型となるものとして定義することもできる。さらに、具体

前層の間の自然変換 $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ に対し、 $\tilde{f} = f(*) : X \rightarrow Y$ を f の基底写像と呼ぶ。次の図式により、自然変換の一致を見るためには、その基底写像が一致することを確かめればよい。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, X) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, Y) \end{array}$$

さらに、 $X \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ と前層 \mathcal{F} について、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, U), \mathcal{F}) & \xrightarrow{f \mapsto f(*)} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*)) \\ \downarrow \cong & \nearrow \tilde{\mathcal{F}} & \\ \mathcal{F}(U) & & \end{array}$$

米田同型: $f \mapsto f_U(\text{id}_U)$

すなわち、各自然変換 $f : \text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, U) \rightarrow \mathcal{F}$ をある切断 $f \in \mathcal{F}(U)$ と同一視した時、これらは同じ基底写像を持つ。

例 1.3.4. **Top, Set, \mathcal{CH} , \mathcal{PBH} , Mfd** 上の Hom 関手はすべて具体層である。もう少し具体的に見てみよう。

\mathcal{U} は **Top, Set, \mathcal{CH} , \mathcal{PBH} , Mfd** のいずれかとし、 $X \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ をとる。この時、 $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X)$ は具体層である。この時、各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$, $x \in \tilde{U} = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(*, U)$, $s \in \mathcal{F}(U) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, X)$ に対し、 $\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) = r_x(s) = s \circ x : * \rightarrow X$ である。今、各 $x \in \tilde{U}$ を $x(*) \in U$ と同一視する。すなわち、具体圏に対して定義される忘却関手を先験的に存在する忘却関手と同一視するのである。これにより、 $\tilde{\mathcal{F}}_U(s)(x) = s(x) \in X$ と書ける。すなわち、このような同一視の下で、 $\tilde{\mathcal{F}}_U : \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X)$ は忘却関手が定める埋め込みである。

具体景 \mathcal{U} に対し、 \mathcal{U} 上の具体前層と自然変換の圏を $\text{CPSH}(\mathcal{U})$ と書き、 \mathcal{U} 上の具体層と自然変換の圏を $\text{CSh}(\mathcal{U})$ と書く。

定理 1.3.5. \mathcal{U} は **Top, \mathcal{CH} , \mathcal{PBH} , Mfd** のいずれかとする。この時、関手 $\mathcal{U} \rightarrow \text{CSh}(\mathcal{U}); X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, X)$ は充満忠実である。

証明. 米田の補題のよく知られた応用である。 □

前層の層化を考えたように、前層の具体化を考えることもできる。

命題 1.3.6 ([?]). \mathcal{U} は具体景とし、 \mathcal{F} は前層とする。 $\mathcal{F}^{\text{con}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}[\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, \mathcal{F}(*))]$ は具体前層である。

さらに、別の具体前層 \mathcal{G} と射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\tilde{f} : \mathcal{F}^{con} \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的に存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}^{con} \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

証明. \mathcal{F}^{con} は明らかに具体前層である。普遍性は次の図式より明らか。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}^{con} & \hookrightarrow & Hom_{\mathbf{Set}}(-, \mathcal{F}(*)) \\ \downarrow f & \swarrow \tilde{f} & & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & & & Hom_{\mathbf{Set}}(-, \mathcal{G}(*)) \end{array}$$

□

命題 1.3.7. \mathcal{G} が具体前層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も具体前層である。

証明. $Hom \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(*) = Hom_{CSh(\mathcal{U})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ とする。 $\tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}_U : \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \rightarrow Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, Hom)$ が単射であればよい。

$f, g \in \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ に対し、 $\tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}_U(f) = \tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}_U(g)$ と仮定する。 $f = g$ を示すためには、任意の $\forall V \in Ob(\mathcal{U}_U)$, $\forall s \in \mathcal{F}(V)$ に対し、 $f_{V \rightarrow U}(s) = g_{V \rightarrow U}(s)$ であることを示せばよい。 $s_f \stackrel{\text{def}}{=} f(s)$, $s_g \stackrel{\text{def}}{=} g(s)$ とすると、 \mathcal{G} が具体前層であることから、 $s_f = s_g$ を示すためには任意の $\forall x \in \tilde{V}$ に対して $r_x(s_f) = r_x(s_g)$ であることを示せばよい。

今、 $\tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}_U(f) = \tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}_U(g)$ より、任意の $\forall x \in \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ に対して $f_x = g_x$ である。よって、 $r_x(s_f) = f_x(r_x(s)) = g_x(r_x(s)) = r_x(s_g)$ である。

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & & \uparrow & & \\ & & V & & \\ & & \uparrow x & & \\ * & & & & \\ & s & \in & \mathcal{F}(V) \xrightarrow{f_{V \rightarrow U}, g_{V \rightarrow U}} & \mathcal{G}(V) & \ni & s_f, s_g \\ & \downarrow r_x & & \downarrow r_x & & \downarrow & \\ & r_x(s) & \in & \mathcal{F}(*) \xrightarrow{f_x = g_x} & \mathcal{G}(*) & \ni & r_x(s_f) = r_x(s_g) \end{array}$$

□

定理 1.3.8. 反映的部分圏 $CPSH(\mathcal{U}) \subset \mathbf{Set}^{\mathcal{U}^{op}}$ の包含関手は任意の極限を創出し、 $CPSH(\mathcal{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

証明. 前層が具体前層であるための条件は、次の形の射が単射となることである。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow Hom_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X)$$

これは \mathbf{Set} 上の写像なので、次の形の図式が差核になることと言い換えられる。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \rightrightarrows \{\mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \cup_{\mathcal{F}(U)} \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X)\}$$

任意の極限は極限と可換なので、特に差核および積とも可換である。また、 Hom 関手は任意の極限を保つ。よって、包含関手は任意の極限を創出する。よって $CPSH(\mathcal{U})$ は完備であり、反映的であることから余完備である。また、冪対象を持つことからデカルト閉圏である。 \square

1.3.2 具体前層の層化

次に、具体前層の層化について述べる。

命題 1.3.9. 具体前層は分離的である。

証明. 具体景の上では、 $\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば、 $\coprod \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}$ は全射である。よって、 $\mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) \rightarrow \prod \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, X)$ は単射である。

(X, \mathcal{F}) を具体前層とすると、次の図式より明らか。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) \\ \text{単射} \downarrow \tilde{\mathcal{F}}_U & & \downarrow \prod \tilde{\mathcal{F}}_{U_i} \\ \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, X) & \xrightarrow{\text{単射}} & \prod \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, X) \end{array}$$

\square

命題 1.3.10. 具体前層の層化は具体層である。

証明. \mathcal{U} は具体景とし、 \mathcal{F} を \mathcal{U} 上の具体前層とする。 \mathcal{F}^+ が具体層であることを示せば良い。

任意の $\forall U \in \mathit{Ob}(\mathcal{U})$ をとり、 $\tilde{\mathcal{F}}^+_U(s) = \tilde{\mathcal{F}}^+_U(t)$ を仮定する。すなわち、任意の $x \in \tilde{U}$ に対し、 $r_x(s) = r_x(t) \in \mathcal{F}^+(*)$ である。 $s = t$ を示せばよい。

$s, t \in \mathcal{F}^+(U) = \varinjlim_{\mathit{Cov}(U)} K$ の代表元 $(s_i) \in \prod \mathcal{F}(U_i)$, $(t_j) \in \prod \mathcal{F}(V_j)$ をとって、 $s = [(s_i)]$, $t = [(t_j)]$ と表す。必要ならば細分を取り直して $\{U_i\}_i = \{V_j\}_j$ としてよい。

$$\begin{array}{ccccc} (s_i), (t_i) & \in & \prod \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \mathcal{F}^+(U) & \ni & s, t \\ \downarrow & & \text{単射} \downarrow \prod \tilde{\mathcal{F}}_{U_i} & & \downarrow \tilde{\mathcal{F}}^+_U & & \downarrow \\ (\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)), (\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)) & \in & \prod \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}_i, \mathcal{F}^+(*)) & \longrightarrow & \mathit{Hom}_{\mathbf{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}^+(*)) & \ni & \tilde{\mathcal{F}}^+_U(s) = \tilde{\mathcal{F}}^+_U(t) \end{array}$$

もしも $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i) = \tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ であれば、 $(s_i) = (t_i)$ となり、結局 $s = t$ であることが従う。よって、 $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i) = \tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ を示せばよいが、 $\tilde{\mathcal{F}}^+_U(s) = \tilde{\mathcal{F}}^+_U(t)$ であることから、ある細分上で $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)$ と $\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ は等しい。具体前層 \mathcal{F} は分離的だから、 $\tilde{\mathcal{F}}_U(s_i)$ と $\tilde{\mathcal{F}}_U(t_i)$ は被覆 $\{U_i\}_i$ 上で等しい。以上より \mathcal{F}^+ は具体層である。 \square

\mathcal{U} は具体景とし、 \mathcal{F} は \mathcal{U} 上の前層とする。

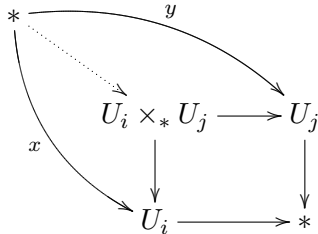
終対象 $*$ の任意の被覆 $\{U_i \rightarrow *\}_i$ に対し、 $\coprod \tilde{U}_i \rightarrow *$ は全射である。 $*$ は一点集合なので、ある添え字 i が存在して、 $\tilde{U}_i = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(*, U_i)$ は空でない。そこで $x : * \rightarrow U_i$ を一つとれば、自明な被覆 $\{* \xrightarrow{id} *\}$ は $\{U_i \rightarrow *\}_i$ の細分である。

$\mu : \mathcal{F}^+(*) \rightarrow \mathcal{F}(*)$ を次のように定義する。任意の $s \in \mathcal{F}^+(*)$ をとり、代表元 $(s_i) \in \coprod \mathcal{F}(U_i)$ をとって、 $s = [(s_i)]$ と表す。そこで、上記のように $\exists x : * \rightarrow U_i$ をとり、制限写像 $r_x : \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(*)$ によって $\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} r_x(s_i)$ とする。

補題 1.3.11. μ は *well-defined* である。

証明. 示すべきことは、 $\mu(s)$ が代表元 $(s_i) \in \coprod \mathcal{F}(U_i)$ および細分 $x : * \rightarrow U_i$ の取り方によらないことである。まず、 x によらないことを示す。

別の $y : * \rightarrow U_j$ が存在したとする。 s_i と s_j は $U_i \times_* U_j$ 上で等しいから、次の図式より明らか。



次に、 $\mu(s)$ が代表元 $(s_i) \in \coprod \mathcal{F}(U_i)$ の取り方によらないことを示す。細分 $\{V_j\}_j \rightarrow \{U_i\}_i$ が存在した時、 (s_i) の $\{V_j\}_j$ への制限を (t_j) と書く。被覆 $\{V_j\}_j$ と s の代表元 (t_j) に対し、上記のように細分 $y : * \rightarrow V_j$ をとる。 $\{V_j\}_j$ は $\{U_i\}_i$ の細分だから、 $* \xrightarrow{x} V_j \rightarrow U_i$ がとれる。これを $x : * \rightarrow U_i$ と書くと、 t_j は s_i の制限だから、 $r_x(s_i) = r_y(t_j)$ である。□

命題 1.3.12. μ は $\nu : \mathcal{F}(*) \rightarrow \mathcal{F}^+(*)$ の逆射である。すなわち、 $\mathcal{F}(*) \stackrel{\nu}{\cong} \mathcal{F}^+(*)$ である。

証明. μ の構成より明らか。□

つまり、具体前層 (X, \mathcal{F}) の層化は (X, \mathcal{F}) と同じ基底集合 X を持つとしてよい。

系 1.3.13. \mathcal{F} は具体前層とし、 \mathcal{F}^+ は \mathcal{F} の層化とする。このとき、標準的な射 $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ は単射である。

証明. 次の図式より明らか。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}^+(U) \\ \text{单射} \downarrow & & \downarrow \text{单射} \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}(*)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\text{Set}}(\tilde{U}, \mathcal{F}^+(*)) \end{array}$$

□

定理 1.3.14. 反映的部分圏 $CSh(\mathcal{U}) \subset CPSH(\mathcal{U})$ の包含関手は任意の極限を創出し、 $CPSH(\mathcal{U})$ は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。

1.3.3 双景と双層

Top のように、グロタンディーク位相を二つ備えた景はしばしば現れる。これらを表す用語を私は知らないので、ここでは次のように定義する。(一応、英訳も用意しておく。)

定義 1.3.15. グロタンディーク位相を二つ備えた圏のことを双景 (*bisite*) と呼ぶ。

\mathcal{U} は双景とする。 \mathcal{U} 上の双層 (*bisheaf*) とは、 \mathcal{U} 上の前層であって、二つのグロタンディーク位相どちらについても層となるもののことである。

双景が二つのグロタンディーク位相どちらについても具体景となる時、これを具体双景 (*concrete bisite*) と呼ぶ。

\mathcal{U} は具体双景とする。 \mathcal{U} 上の具体双層 (*concrete bisheaf*) とは、 \mathcal{U} 上の具体前層であって、二つのグロタンディーク位相どちらについても具体層となるもののことである。

例 1.3.16. **Top** 上の *Hom* 関手は具体双層である。

命題 1.3.17. \mathcal{F} は **Top** 上の具体双層とする。**Top** 上の射の族 $\{f_i : F_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ について、各 f_i は閉埋め込みで、 $\{Im(f_i)\}_{i \in I}$ が X の局所有限閉被覆であると仮定する。この時、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \mathcal{F}(F_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(F_i \times_X F_j)$$

1.4 位相空間上の層

1.4.1 一般論

位相空間上の層を改めて勉強する意味はあまりないのだが、ここでは一般の圏 \mathcal{C} を値に持つ層と前層について考察したい。圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。その上で、前層及び層は圏 \mathcal{C} を値に持つとする。

命題 1.4.1. X 上の前層 \mathcal{F} に対し、 $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ が導くすべての茎 (*stalk*) の間の射 $\nu_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ は同型である。

証明. x 周りの任意の開近傍 $U \subset X$ および任意の開被覆 $\{U_i \subset U\}$ に対し、 $x \in U_i$ なる i を一つ選び、 $K_U(\{U_i \subset U\}) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ を α と表す。これは i の取り方に依らない。このような α 達によって、 $\beta_U : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ が導かれる。 β_U 達によって導かれる $\mathcal{F}_x^+ \rightarrow \mathcal{F}_x$ は ν_x の逆射である。□

$f : X \rightarrow Y$ を連続写像とし、 \mathcal{F} を Y 上の前層とする。この時、 X 上の前層 $f^p\mathcal{F}$ を、 $f^p\mathcal{F}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset f(V)}} \mathcal{F}(U)$ で定める。

命題 1.4.2. $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とし、 \mathcal{F} を Y 上の層とする。 X 上の前層 $f^p\mathcal{F}$ は分離的である。

証明. 任意の開集合 $V \subset X$ および開被覆 $\{V_i \subset V\}$ をとる。ここで、 $U_i \supset f(V_i)$ なる任意の開集合族 $U_i \subset Y$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(\bigcup U_i) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$f^p \mathcal{F}(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_i \supset f(V_i)}} \mathcal{F}(\bigcup U_i)$, $f^p \mathcal{F}(V_i) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_i \supset f(V_i)}} \mathcal{F}(U_i)$ で、順極限と差核は交換するから、 $f^p \mathcal{F}(V) \rightarrow \prod f^p \mathcal{F}(V_i)$ は単射である。 \square

注意 1.4.3. $f^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_i \supset f(V_i)}} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ であるとは限らないので、 $f^p \mathcal{F}$ が層であるとは限らない。

$f: X \rightarrow Y$ を連続写像とし、 \mathcal{F} を Y 上の層とする。 X 上の前層 $f^p \mathcal{F}$ の層化を $f^* \mathcal{F}$ と書く。これを、層 \mathcal{F} の f による逆像という。

引き続き $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とし、 \mathcal{G} を X 上の前層とする。 Y 上の前層 $f_* \mathcal{G}$ を $f_* \mathcal{G}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ によって定める。明らかに、 \mathcal{G} が X 上の層ならば $f_* \mathcal{G}$ は Y 上の層である。これを層 \mathcal{G} の f による順像という。

命題 1.4.4. $\text{Hom}_{\text{Sh}(X)}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(Y)}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G})$

今、明らかに一点集合 $*$ 上の層の圏は \mathcal{C} と一致する。この同一視の下で、位相空間 X 上の層 \mathcal{F} の点 $x \in X$ における茎 (stalk) は $\tau_x^* \mathcal{F}$ と書ける。ただし、 $\tau_x^*: \{x\} \hookrightarrow X$ は包含写像である。

定義 1.4.5. 各 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、 X 上の層 $(\tau_x)_* C$ を x における摩天楼層 (skyscraper sheaf) という。

X 上の前層 \mathcal{F} に対し、 $\mathcal{F}^\# \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in X} (\tau_x)_* \mathcal{F}_x$ とする。この時、自然な射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ が存在する。

命題 1.4.6. \mathcal{F} が層ならば、自然な射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ は正則な単射 (regular monomorphism) である。すなわち、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ はある図式の差核として書ける。

証明. 各開集合 $U \subset X$ に対し、 $\mathcal{F}_U \stackrel{\text{def}}{=} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F}$ とする。具体的には $\mathcal{F}_U(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U \cap V)$ で定義されている。

各 $x \in X$ 周りの任意の開近傍 $U_x \subset X$ に対し、 $\{U_x \subset X\}$ は開被覆であるので、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F} \rightarrow \prod \mathcal{F}_{U_x} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}_{U_x \cap U_y}$$

$\{U_x \subset U\}$ について順極限をとれば、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ はある図式の差核として導かれる。 \square

系 1.4.7. X 上の層 \mathcal{F} および前層 \mathcal{G} とその間の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間の射 $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて単射ならば、 f も単射である。また、 \mathcal{G} が層で各 $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて正則な単射ならば、 f も正則な単射である。

証明. 次の図式より明らかな,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^\# \\ \downarrow f & & \downarrow \prod f_x \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^\# \end{array}$$

□

1.4.2 十分多くの点を持つ場合

上記の性質は全射については成り立たない。すなわち、 f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて全射であったとしても、 f も全射であるとは限らない。こういった性質を記述するため、トポス論から次の定義を用意する。

定義 1.4.8. 位相空間 X 上の層の圏が十分多くの点を持つとは、 X 上の層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とその間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて同型ならば、 f も同型であることである。

以下、圏 \mathcal{C} の性質として、任意の位相空間 X 上の \mathcal{C} に値を持つ層の圏が十分多くの点を持つと仮定する。

命題 1.4.9. X 上の層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とその間の射 $f, g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f, g が導く各茎の間で $f_x = g_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ ならば、 $f = g$ である。

証明. 次のような差核図式をとる。

$$\mathcal{H} \xrightarrow{h} \mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \mathcal{G}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、次の差核図式が導かれる。

$$\mathcal{H}_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{F}_x \begin{array}{c} \xrightarrow{f_x} \\ \xrightarrow{g_x} \end{array} \mathcal{G}_x$$

$f_x = g_x$ より、 h_x は同型である。よって、 h は同型である。 □

命題 1.4.10. X 上の層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とその間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ が全射ならば、 f も全射である。

証明. $g \circ f = h \circ f$ と仮定する。各点 $x \in X$ で茎をとると、 $g_x \circ f_x = h_x \circ f_x$ である。 f_x 全射だから、 $g_x = h_x$ である。よって $g = h$ である。 □

命題 1.4.11. X 上の層の錐 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^i$ について、図式 \mathcal{F}^i が有限で、各茎の錐 $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^i$ が極限錐ならば、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^i$ は有限極限錐である。

証明. 関式 \mathcal{F}^i の極限 \mathcal{F}' をとる. この時、ただ一つの射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ が導かれる. 層の圏の極限は前層の圏の極限と一致するので、すなわち各点で \mathcal{C} 上の極限と一致する. \mathcal{C} 上では有限極限とフィルター余極限は交換するので、各茎 \mathcal{F}'_x は関式 \mathcal{F}_x^i の極限である. よって、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ が茎に導く射は同型である. よって $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ は同型である. \square

命題 1.4.12. X を位相空間、 \mathcal{F} を X 上の層とする. また、各閉集合 $Z \subset X$ の包含写像を $\tau_Z : Z \hookrightarrow X$ と表す. 任意の局所有限閉被覆 $\{Z_i \subset X\}$ に対し、次の関式は差核である.

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(Z_i) \rightrightarrows \prod \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}(Z_i \cap Z_j)$$

証明. 次の関式が差核であることを示す.

$$\mathcal{F} \rightarrow \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F} \rightrightarrows \prod (\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、

$$\mathcal{F}_x \rightarrow \prod ((\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F})_x \rightrightarrows \prod ((\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F})_x$$

ここで、次のことに注意をする. IPC 性質からは、 $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_i \ni x}} \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U_i) \cong \prod \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_i \ni x}} (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U_i)$

であることがすぐにわかる. ところが、今計算している極限は $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \ni x}} \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U)$ である. すなわち、 i によらない添え字で順極限をとっているのである. この順極限と積の交換を見るためには、積が有限でなければならない. そこで、局所有限性を用いて、十分小さい開近傍をとれば積は有限となることを見る必要がある.

任意の閉集合 $Z \subset X$ に対して、

$$((\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F})_x = \begin{cases} * & (x \notin Z) \\ \mathcal{F}_x & (x \in Z) \end{cases}$$

である. よって、上の関式は下のよう書ける.

$$\mathcal{F}_x \rightarrow \prod_{Z_i \ni x} \mathcal{F}_x \rightrightarrows \prod_{Z_i \cap Z_j \ni x} \mathcal{F}_x$$

これが差核であることは簡単にわかる. \square

命題 1.4.13. X を正則空間、 $Z \subset X$ を閉集合とし、 $\tau_Z : Z \hookrightarrow X$ は包含写像とする. X 上の層 \mathcal{F} に対し、 $\tau_Z^p \mathcal{F} = \tau_Z^* \mathcal{F}$ である.

証明. まずは $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset Z}} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ が同型であることを示す. 各点で茎をとれば、

$x \in Z$ の時は $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_x$ となり、 $x \notin Z$ の時は X が正則であることより $* \rightarrow *$ となる. これらはすべて同型である.

$\lim_{U \supset Z} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ なる合成が同型だから、 $(\tau_Z)_* \tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ は分裂全射である。これが単射であればよい。

Z の任意の開集合 V 、開被覆 $\{V_i \subset V\}$ および $U_i \supset V_i$ なる開集合族 $U_i \subset X$ に対し、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(\bigcup U_i) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(\{V_i \subset V\}) & \longrightarrow & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

ここで、上列は差核である。 $U_i \supset V_i$ について順極限をとれば、IPC 性質およびフィルタ一余極限と差核が交換することから、次の図式が導かれる。

$$\begin{array}{ccc} \tau_Z^p \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\text{正則な単射}} & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \\ \text{正則な単射} \downarrow & & \parallel \\ K(\{V_i \subset V\}) & \xrightarrow{\text{正則な単射}} & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \rightrightarrows \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

今、図式は余完備な圏で考えているので、正則な単射は余核対 (cokernel pair) の差核である。 $\{V_i \subset Z\}$ について順極限をとれば、フィルタ一余極限と差核が交換することから、 $\tau_Z^p \mathcal{F}(V) \rightarrow \tau_Z^* \mathcal{F}(V)$ は正則な単射である。よって、 $\tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow \tau_Z^* \mathcal{F}$ は正則な単射である。□

1.5 一般化された位相空間

1.5.1 定義

定義 1.5.1. 擬位相空間 (*quasi-topological space*) とは、 \mathbf{Top} 上の具体双層のことである。擬位相空間の間の自然変換を、擬連続写像 (*quasi-continuous map*) と呼ぶ。

これは、具体的に次のような定義で書くこともできる。

定義 1.5.2. 擬位相空間 (*quasi-topological space*) とは、集合 X と部分関手 $\mathcal{Q} \subset \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, X) : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ の組 (X, \mathcal{Q}) で、次を満たすものである。

- 一点空間 $*$ に対し、 $\mathcal{Q}(*) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(*, X)$
- 任意の位相空間 A および任意の開被覆 $\{U_i \subset A\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{Q}(A) \rightarrow \prod \mathcal{Q}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{Q}(U_i \cap U_j)$$

- 任意の位相空間 A および任意の有限開被覆 $\{F_i \subset A\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{Q}(A) \rightarrow \prod \mathcal{Q}(F_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{Q}(F_i \cap F_j)$$

擬連続写像 $f : (X, \mathcal{Q}) \rightarrow (Y, \mathcal{R})$ とは、写像 $f : X \rightarrow Y$ であって、 $f_*(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{R}$ なるものである。

例 1.5.3. A を位相空間とすると、 $(A, \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, A))$ は擬位相空間である。さらに (X, \mathcal{Q}) を擬位相空間とすると、写像 $f : A \rightarrow X$ が擬連続であるための必要十分条件は、 $f \in \mathcal{Q}(A)$ なることである (\because 米田の補題)。特に、位相空間の間の写像が擬連続であるための必要十分条件は、それが連続であることである。

例 1.5.4. A, B を位相空間とすると、 $C(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, B)$ は自然に擬位相空間の構造を持つ。(1.3.7 を参照。)

注意 1.5.5. 通常、擬位相空間と言うと、Spanier の定義 [?] である \mathcal{CH} 上の具体層のことを指すことが多い。しかし、h-原理の議論で都合の良いように、上記の定義 [?] を用いる。しかし、[?] の議論を正当化するには不十分なので、次のように定義をする。再び私が勝手に用意した定義である。

定義 1.5.6. 仮想的位相空間 (*virtual-topological space*) とは、 \mathbf{Top} 上の双層のことである。

仮想的位相空間の間の自然変換を、仮想的連続写像 (*virtual-continuous map*) と呼ぶ。

ホモトピー的対象 (*homotopical object*) とは、 \mathbf{Top} 上の有限閉被覆系に関する層のことである。

ホモトピー的対象の間の自然変換をホモトピー的射 (*homotopical arrow*) と呼ぶ。

擬位相空間の圏を \mathbf{qTop} 、仮想的位相空間の圏を \mathbf{vTop} 、ホモトピー的対象の圏を \mathbf{hTop} と書く。

定理 1.5.7. $X \mapsto \text{Hom}(-, X)$ により定まる関手 $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{qTop} \subset \mathbf{vTop} \subset \mathbf{hTop}$ は充満忠実で、任意の極限を保つ。

証明. 再び、米田の補題のよく知られた応用により、これは充満忠実である。また、 Hom 関手は極限を保つので、これも任意の極限を保つ。□

以下、上記の対応で同一視して、 $\text{Hom}(-, X)$ を X と書く。

このような圏を考える一つの利点は、これらが完備なデカルト閉圏となることである。一方、 \mathbf{qTop} および \mathbf{vTop} は余完備ではない。なぜなら、“双層化”のようなものが定義できないからである。ホモトピー論を展開するためには \mathbf{hTop} 上で行わなければならない。実際、 \mathbf{hTop} の上では通常と全く同様の方法で、ホモトピー群や Serre ファイブレーションを定義することができる。これにより、 \mathbf{hTop} 上にはモデル構造が入るであろう。(未確認。[?] [?] などを参照。)

\mathbf{vTop} や \mathbf{hTop} の上では基底集合や基底写像をとった議論には不向きであるものの、圏論的に議論を進めることで通常の位相空間とほぼ同様に議論できる。 \mathbf{vTop} の上では開被覆系および有限閉被覆系に関する貼り合わせが行える。 \mathbf{hTop} の上では開被覆系に関する貼り合わせは行えないが、ホモトピー論に必要な有限閉被覆系に関する貼り合わせは行える。

\mathbf{qTop} では基底集合や基底写像を用いた議論が可能である。一方、 \mathbf{hTop} 上のフィルター余極限は非常に上手くふるまうため、圏論的な議論は \mathbf{hTop} が適している。特に、層の値域として用いる場合、 \mathbf{qTop} では上手くいかないことが多い。

定理 1.5.8. 忘却関手 $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ は極限およびフィルター余極限を創出し、 \mathbf{hTop} は完備かつ余完備なデカルト閉圏である。特に、 \mathbf{hTop} 上ではフィルター余極限と有限極限が交換し、IPC性質を満たす。

証明. \mathbf{Top} 上の前層が有限閉被覆系に関して層であるための条件は、任意の有限閉被覆 $\{F_i \rightarrow X\}$ に対して次の形の図式が差核となることである。

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \mathcal{F}(F_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(F_i \times_X F_j)$$

今、積は有限である。よって、 \mathbf{Set} 上では有限極限とフィルター余極限が交換することから、忘却関手 $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ はフィルター余極限を創出する。□

以下の性質は今後よく使う。これは、 \mathbf{hTop} 上では成り立つが、 \mathbf{qTop} や \mathbf{vTop} 上では成り立たない。

命題 1.5.9. A を位相空間、 $X = \lim_{\rightarrow i} X_i$ を \mathbf{hTop} 上のフィルター余極限錐とする。また、 $f: A \rightarrow X$ はホモトピー的射とする。

1. 次の図式を可換にする $\tilde{f}: A \rightarrow X_i$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} & & X_i \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

2. 別の $\tilde{g}: A \rightarrow X_j$ に対しても上記の性質を満たすとき、ある $X_i, X_j \rightarrow X_k$ が存在して次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{f}} & X_i \\ \downarrow \tilde{g} & & \downarrow \\ X_j & \longrightarrow & X_k \end{array}$$

証明. 米田同型より $\text{Hom}_{\mathbf{vTop}}(A, X) \cong X(A)$ である。 \mathbf{hTop} 上のフィルター余極限は $\mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ 上のフィルター余極限と一致する。上記の性質は単にフィルター余極限の定義を言い換えただけである。□

1.5.2 ホモトピー論

定義 1.5.10. $f : X \rightarrow Y$ が Serre ファイブレーション (Serre fibration) であるとは、任意の n 次元円盤 D^n と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、 $I = [0, 1]$ は単位閉区間とする。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

$f : X \rightarrow Y$ が微小的 Serre ファイブレーション (micro-fibration) または Serre マイクロ・ファイブレーションであるとは、任意の n 次元円盤 D^n と上記のような四角形の可換図式に対し、十分小さい $\epsilon > 0$ と斜めに横断する射 $\gamma : D^n \times [0, \epsilon] \rightarrow X$ が存在し、図式を全て可換にすることである。

例 1.5.11. ファイバー束は Serre ファイブレーションである。

例 1.5.12. 滑らかな多様体間の沈め込みは微小的 Serre ファイブレーションである。

Serre ファイブレーションよりも強い、Hurewicz ファイブレーションというものもある。

定義 1.5.13. $f : X \rightarrow Y$ が Hurewicz ファイブレーション (Hurewicz fibration) であるとは、任意の位相空間 A と次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ が存在し、図式を全て可換にすることである。ただし、 $I = [0, 1]$ は単位閉区間とする。

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f \\ A \times I & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

$f : X \rightarrow Y$ が微小的 Hurewicz ファイブレーション (micro-fibration) または Hurewicz マイクロ・ファイブレーションであるとは、任意の位相空間 A と上記のような四角形の可換図式に対し、十分小さい $\epsilon > 0$ と斜めに横断する射 $\gamma : A \times [0, \epsilon] \rightarrow X$ が存在し、図式を全て可換にすることである。

CW 複体は \mathbf{hTop} 上でも圏論的に定義することができる。ただし、これは一般には \mathbf{Top} 上の CW 複体と一致するとは限らない。なぜなら、埋め込み $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{qTop}$ は余極限を保つとは限らないため、“貼り合わせ”が一致するとは限らないからである。しかし、次の定理により局所有限な CW 複体は \mathbf{qTop} 上で圏論的に上手くふるまう。

定理 1.5.14. \mathbf{Top} 上の射の族 $\{X_i \rightarrow X\}_i$ は開被覆または局所有限閉被覆とする。この時、 \mathbf{qTop} 上で次の図式は余差核である。

$$\text{Hom}(-, X) \leftarrow \coprod \text{Hom}(-, X_i) \rightrightarrows \coprod \text{Hom}(-, X_i \times_X X_j)$$

証明. 普遍性を示すため、任意の錐 $Hom(-, X_i) \rightarrow Y$ をとる。米田同型により、 $Nat(Hom(-, A), Y) \cong Y(A)$ である。 Y は具体双層だから、次の図式が差核になる。

$$Nat(Hom(-, X), Y) \rightarrow \prod Nat(Hom(-, X_i), Y) \rightrightarrows \prod Nat(Hom(-, X_i \times_X X_j), Y)$$

よって、一意的な射 $Hom(-, X) \rightarrow Y$ が導かれる。□

1.5.3 hTop に値を持つ層

定理 1.5.15. X を位相空間とし、 X 上の **hTop** に値を持つ層 \mathcal{F} をとる。このとき、任意の位相空間 A に対し、 $U \mapsto \mathcal{F}(U)(A)$ は X 上の **Set** に値を持つ層である。この層を $\mathcal{F}[A]$ と表した時、各茎は $\mathcal{F}[A]_x = \mathcal{F}_x(A)$ である。

さらに、 $A \mapsto \mathcal{F}[A]$ は関手 $\mathbf{Top}^{op} \rightarrow Sh(X; \mathbf{Set})$ を与える。これは有限閉被覆系について張り合わせ条件を満たす。すなわち、 $Sh(X; \mathbf{Set})$ に値を持つ層である。この対応により、圏同値 $Sh(X; \mathbf{hTop}) \cong Sh(\mathbf{Top}; Sh(X; \mathbf{Set}))$ が定まる。

証明. 任意の開集合 $U \subset X$ および開被覆 $\{U_i \subset U\}$ をとる。この時、次の図式は **hTop** 上の差核である。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

すなわち、これは $\mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ 上の差核であるので、任意の位相空間 A に対し、次の図式は **Set** 上の差核である。

$$\mathcal{F}(U)(A) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)(A) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)(A)$$

よって、 $\mathcal{F}[A]$ は層である。また、**hTop** 上のフィルター余極限は $\mathbf{Set}^{\mathbf{Top}^{op}}$ 上のフィルター余極限と一致するので、同様に $\mathcal{F}[A]_x = \mathcal{F}_x(A)$ である。

後半は明らか。□

命題 1.5.16. 位相空間 X 上の **hTop** に値を持つ層の圏は、十分多くの点を持つ。

証明. 位相空間 X 上の **hTop** に値を持つ層 \mathcal{F}, \mathcal{G} およびその間の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ について、 f が導く各茎の間の射 $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて同型であると仮定する。任意の位相空間 A に対し、 $f[A]_x: \mathcal{F}[A]_x \rightarrow \mathcal{G}[A]_x$ は同型である。よって $f[A]: \mathcal{F}[A] \rightarrow \mathcal{G}[A]$ は同型である。すなわち、 f は同型である。□

第2章 h-原理

2.1 ジェット束とh-原理

ジェット束の勉強には [?] [?] [?] などが参考になるようである。Wikipedia([Jet \(mathematics\)](#), [Jet bundle](#)) も参考になる。

$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、 $f: U \rightarrow V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。各自然数 r に対し、 $D_p^r f: \bigotimes^r \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $D_p^r f(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(p)$ で定める。(ただし、 $\{\mathbf{e}_i\}_i$ は標準的な基底である。) これを用いて、多項式写像

$$P_p^r f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(p) + \frac{1}{1!} D_p f(\mathbf{x} - p) + \frac{1}{2!} D_p^2 f(\mathbf{x} - p)^{\otimes 2} + \cdots + \frac{1}{r!} D_p^r f(\mathbf{x} - p)^{\otimes r} \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}])^m$$

を定める。

定義 2.1.1. $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、 $f: U \rightarrow V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。多項式の同値類を値に持つベクトル $j_p^r f(\mathbf{x}) = [P_p^r f(\mathbf{x})] \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(r+1 \text{ 次式}))^m$ を f の点 p における r -ジェットと呼ぶ。 $J^r(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{j_p^r f | p \in U, f: U \rightarrow V \text{ は滑らかな写像}\}$ を (アフィン) r -ジェット空間 (r -jet space) という。

命題 2.1.2. $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、 $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j_p^r(g \circ f) = j_{f(p)}^r g \circ j_p^r f$ である。

証明. Faà di Bruno の公式の言い換えである。具体的には次のように解ける。

Taylor の公式より、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= P_p^r f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \\ g(\mathbf{y}) &= P_{f(p)}^r g(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y} - f(p)|^r) \\ (g \circ f)(\mathbf{x}) &= P_p^r (g \circ f)(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} &P_p^r (g \circ f)(\mathbf{x}) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\mathbf{x}) \\ &= \{P_{f(p)}^r g(P_p^r f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r)) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\mathbf{x})\} + o(|P_p^r f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r) - f(p)|^r) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \\ &= o(|\mathbf{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。これは多項式だから、 r 次以下の項は 0 である。 □

定義 2.1.3. M, N を多様体、 $f : M \rightarrow N$ を滑らかな写像とし、点 $p \in M$ をとる。 f の点 p における r -ジェット $(r\text{-jet})j_p^r f$ とは、各座標近傍 $(U, \phi) \subset M, (V, \psi) \subset N$ ($p \in U, f(p) \in V$) に対して $j_{\phi(p)}^r(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \in J^r(U, V)$ を対応させるものである。

$J^r(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \{j_p^r f | p \in M, f : M \rightarrow N \text{ は滑らかな写像}\}$ を r -ジェット空間 ($r\text{-jet space}$) という。

命題 2.1.4. $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m, W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、 $f : U \rightarrow V, g : U \rightarrow W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j_p^r(f \times g) = j_p^r f \times j_p^r g \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(r+1 \text{ 次式}))^{m+k}$ である。

定義 2.1.5. $f : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $s : B \rightarrow E$ を滑らかな切断とし、点 $p \in B$ をとる。 s の点 p における r -ジェット $j_p^r s$ とは、各自明化近傍 $(U, h : f^{-1}(U) \rightarrow F \times U)$ ($p \in U$) に対して $j_p^r(pr_1 \circ h \circ s) \in J^r(U, F)$ を対応させるものである。

$J^r(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{j_p^r s | p \in B, s : B \rightarrow E \text{ は滑らかな切断}\}$ を r -ジェット束 ($r\text{-jet bundle}$) という。

注意 2.1.6. $s : B \rightarrow E$ を写像として見た時のジェットと切断として見たときのジェットは、同じ記号を用いてしまったが、明確に異なる。写像 $M \rightarrow N$ のジェットとは、自明束 $N \times M \rightarrow M$ の切断のジェットと見なせる。

$J^r(M, N)$ は、 $J^r(U, V)$ の集まりを座標近傍系として多様体の構造を持つ。同様に、 $J^r(f)$ は、 $J^r(U, F)$ の集まりを貼り合わせることで多様体の構造を持つ。さらに、 $j_p^r s \mapsto p$ によって自然にファイバー束 $J^r(f) \rightarrow B$ が定まる。ジェット束と言った時、このファイバー束構造を暗に含めることが多い。

$f : E \rightarrow B$ がベクトル束の時、ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ はベクトル束の構造を持つ。

$f : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $s : B \rightarrow E$ を滑らかな切断とする。この時、 r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の切断 $j^r s : B \rightarrow J^r(f)$ が、 $j^r s(p) \stackrel{\text{def}}{=} j_p^r s$ によって定まる。

定義 2.1.7. 滑らかなファイバー束 $f : E \rightarrow B$ 上の r 階の偏微分関係 (*partial differential relation*) とは、 r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の部分束 $R \subset J^r(f)$ のことである。 r 階の偏微分関係 R が開 (*resp.* 閉) であるとは、 $R \subset J^r(f)$ が部分集合として開 (*resp.* 閉) であることをいう。

滑らかな切断 $s : B \rightarrow E$ が偏微分関係 R の解 (*solution*) であるとは、 $\text{Im}(j^r s) \subset R$ を満たすことである。

$f : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。各開集合 $U \subset B$ に対し、 $\text{Sol}(R; U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s : U \rightarrow E | s \text{ は } R \text{ の解}\}$ 、 $\Gamma(R; U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s : U \rightarrow R | s \text{ は } R \rightarrow B \text{ の } U \text{ 上の連続な切断}\}$ とする。 $\text{Sol}(R; -), \Gamma(R; -)$ は \mathbf{qTop} に値を持つ B 上の層である。

定義 2.1.8. r 階の偏微分関係 $R \subset J^r(f)$ が h -原理 (*h-principle*) を満たすとは、 $\pi_0(\text{Sol}(R; B)) \rightarrow \pi_0(\Gamma(R; B))$ が全射となることである。(次のように言い換えられる。すなわち、 $R \rightarrow B$ の任意の連続な切断 $t : B \rightarrow R$ に対し、 R の解 $s : B \rightarrow E$ が存在し、 s と t は R 上でホモトピックとなる。)

R がパラメトリック h -原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは、 $Sol(R; B) \subset \Gamma(R; B)$ が弱ホモトピー同値となることである。

2.2 層理論的 h-原理

2.2.1 定義

B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{vTop} に値を持つ B 上の層とする。

任意の位相空間 P に対し、 \mathcal{F} の P に関するパラメータ化 \mathcal{F}^P とは、次のように定義される $B \times P$ 上の層である。

$$\text{各開集合 } U \subset B, R \subset P \text{ に対し、} \mathcal{F}^P(U \times R) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U)^R$$

実際、次の補題により、これは $B \times P$ 上の層を定める。

補題 2.2.1. 各開集合 $U \subset B$, $R \subset P$ およびそれぞれの開被覆 $\{U_i\}$, $\{R_k\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(U)^R \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)^{R_k} \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \end{array} \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)^{R_k \cap R_l}$$

証明. X を任意の位相空間とし、 $(f_{ik}) \in \prod \mathcal{F}(U_i)^{R_k}(X)$ について、 $r_1((f_{ik})) = r_2((f_{ik}))$ を仮定する。 $\{R_k\}$ は R の開被覆だから、下図の上列は余差核である。

$$\begin{array}{ccc} R & \longleftarrow & \prod R_k \longleftarrow \prod R_k \cap R_l \\ & \searrow^{f_i} & \\ & \mathcal{F}(U_i) & \end{array}$$

これにより、上図の f_i がただ一つ導かれる。これはさらに下図の f をただ一つ導く。

$$\begin{array}{ccc} R & & \\ \downarrow f & \searrow^{f_i} & \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \end{array}$$

□

注意 2.2.2. \mathbf{vTop} 上の極限と \mathbf{hTop} 上の極限が一致することから、 \mathbf{vTop} に値を持つ層は \mathbf{hTop} に値を持つ層と見なせる。上記のパラメータ化には開被覆系に関する貼り合わせの議論が必要であり、 \mathbf{vTop} に値を持つ層だからこそ定義できる。一方、 \mathbf{vTop} に値を持つ前層には層化が定義できず、また茎も上手くふるまわない。そこで、層化や茎をとった議論を行う場合は \mathbf{hTop} に値を持つ前層と見なす必要がある。

\mathcal{F} の B に関するパラメータ化 \mathcal{F}^B は $B \times B$ 上の層である。そこで、対角射 $\Delta : B \rightarrow B \times B$ による \mathcal{F}^B の引き戻しを $\mathcal{F}^* \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^* \mathcal{F}^B$ とする。これは \mathbf{hTop} に値を持つ層である。

各開集合 $U \subset B$ に対し、次の射の列を考える。

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}(U)^U = \mathcal{F}^B(U \times U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}^*(U)$$

ただし、 α は $\mathcal{F}(U) \times U \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{F}(U)$ に対応する射で、 β は $\Delta(U) \subset U \times U$ が導く標準的な写像である。これによって、層の射 $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \beta \circ \alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が定まる。構成より明らかに Δ は全射ではない。実際、 $\mathcal{F}^*(U)$ の切断は、各点 $x \in U$ に対しある切断 s^x の芽 $s_x^x \in \mathcal{F}_x$ を“連続的”に対応させるものである。ここで、連続的というのは $(x, y) \mapsto s_y^x$ なる対応が(局所的に)連続であることを意味する。

命題 2.2.3. 任意の開集合 $U \subset B$ に対して $\mathcal{F}(U)$ が擬位相空間ならば、 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は単射である。

証明.

$$\begin{aligned} \Delta(s) = \Delta(t) &\Leftrightarrow \forall x \in U \text{ に対して } s_x = t_x \\ &\Leftrightarrow s = t \end{aligned}$$

□

\mathcal{F}^* の切断を \mathcal{F} の形式的な切断と呼ぶことにする。これと比較して \mathcal{F} の切断を \mathcal{F} の厳密な切断と呼ぶことにする。

定義 2.2.4. B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{vTop} に値を持つ B 上の層とする。

\mathcal{F} が(層理論的) h -原理 (*sheaf theoretic h-principle*) を満たすとは、 $\pi_0(\mathcal{F}(U)) \xrightarrow{\Delta^*} \pi_0(\mathcal{F}^*(U))$ が全射となることである。(\mathbf{qTop} に値を持つならば、次のように言い換えられる。すなわち、任意の開集合 $U \subset B$ および任意の形式的な切断 $\forall s \in \mathcal{F}^*(U)$ に対し、ある厳密な切断 $\exists t \in \mathcal{F}(U)$ が存在して、 $\mathcal{F}^*(U)$ の中で s と t を結ぶ道が存在する。)

\mathcal{F} がパラメトリック h -原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、 $\Delta : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値となることである。

2.2.2 しなやかな層

任意の部分集合 $K \subset B$ に対し $\mathcal{F}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{U \supset K} \mathcal{F}(U)$ と定めるのだが、やはり \mathbf{hTop} 上の順極限によって $\mathcal{F}(K)$ を定める。 B が正則、 K が閉集合であれば、1.4.13 より、 $\mathcal{F}(K) = \tau_K^* \mathcal{F}(K)$ である。

定義 2.2.5. B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層または前層とする。

\mathcal{F} がしなやか (*flexible*) またはフレキシブルであるとは、任意の二つのコンパクト部分集合 $\forall K \subset \forall L \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre ファイブレーションになることである。

\mathcal{F} が微小的しなやか (*micro-flexible*) またはマイクロ・フレキシブルであるとは、任意の二つのコンパクト部分集合 $K \subset L \subset B$ に対し、制限写像 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が微小的 Serre ファイブレーションになることである。

命題 2.2.6. B を局所有限な単体複体 (e.g. 多様体)、 \mathcal{F} を \mathbf{vTop} に値を持つ B 上の層とする。

1. 形式的な切断の層 \mathcal{F}^* はしなやかである。
2. $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^* (x \in B)$ はホモトピー同値である。

証明.

1. \mathcal{F}^* はしなやかである。

任意の二つのコンパクト部分集合 $\forall K \subset \forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^*(L) \\
 \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\
 D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}^*(K)
 \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.9 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L (U \subset W)$ および二つの仮想的連続写像 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \rightarrow \mathcal{F}^*(W), \tilde{\beta} : D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}^*(W) & & \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow & \searrow & \\
 D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^*(L) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \nearrow \tilde{\beta} & \mathcal{F}^*(U) & \searrow & \\
 D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}^*(K) & &
 \end{array}$$

同様に、 \mathcal{F}^* の定義から、ある開被覆 $\{U_i \subset U\}, \{W_k \subset W\}$ ($\{U_i\}$ は $\{U \cap W_k\}$ の細分。) および二つの仮想的連続写像 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \rightarrow \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)), \tilde{\beta} : D^n \times I \rightarrow$

$\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}^*(W) & & \\
 \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \uparrow \bar{\alpha} & \searrow & \\
 & D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^*(L) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}^*(U) & & \\
 \downarrow & \nearrow \bar{\beta} & \uparrow \bar{\beta} & \searrow & \\
 & D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}^*(K) &
 \end{array}$$

ここで、 $\mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k))$, $\mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i))$ は次の図式が差核となるように定義されている。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) &\rightarrow \prod \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(W_k \cap W_l)^{W_k \cap W_l} \\
 \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) &\rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)^{U_i} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)^{U_i \cap U_j}
 \end{aligned}$$

そこで、次の合成によって α_k, β_i を定める。

$$\begin{aligned}
 \alpha_k : D^n \times \{0\} &\xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{F}^B(\bigcup(W_k \times W_k)) \rightarrow \prod \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \rightarrow \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \\
 \beta_i : D^n \times I &\xrightarrow{\bar{\beta}} \mathcal{F}^B(\bigcup(U_i \times U_i)) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)^{U_i} \rightarrow \mathcal{F}(U_i)^{U_i}
 \end{aligned}$$

幕対象の普遍性により、これらはただ一つの $\alpha'_k : D^n \times \{0\} \times W_k \rightarrow \mathcal{F}(W_k)$, $\beta'_i : D^n \times I \times U_i \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$ を導く。今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \rightarrow I$ で、 K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、 $\phi : D^n \times I \times U \rightarrow D^n \times I \times U$ を $\phi(x, t, v) \stackrel{\text{def}}{=} (x, t\delta(v), v)$ として定める。 $W'_k \stackrel{\text{def}}{=} W_k - \text{supp}(\delta)$, $W_{k,i} \stackrel{\text{def}}{=} W_k \cap U_i$ とする。

$\gamma'_{k,i} : D^n \times I \times W_{k,i} \rightarrow \mathcal{F}(W_{k,i})$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \times W_{k,i} \xrightarrow{\phi} D^n \times I \times W_{k,i} \xrightarrow{\beta'_i} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(W_{k,i})$$

幕対象の普遍性により、これらはただ一つの $\gamma_{k,i} : D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}(W_{k,i})^{W_{k,i}}$ を導く。また、 $\gamma_k : D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$ を次の合成によって定義する。

$$D^n \times I \rightarrow D^n \times \{0\} \xrightarrow{\alpha'_k} \mathcal{F}(W_k)^{W_k} \rightarrow \mathcal{F}(W'_k)^{W'_k}$$

$\gamma_{k,i}, \gamma_k$ 達は $\gamma : D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}^B((\bigcup W_{k,i}) \cup (\bigcup W'_k)) \rightarrow \mathcal{F}^*(W) \rightarrow \mathcal{F}^*(L)$ を導く。これは、最初の図式を可換にする。

2. $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}^*(x \in B)$ はホモトピー同値である。

$x \in B$ 周りで星形近傍をとることにより、 x の近傍基 $\exists \{U_0 \supset U_1 \supset \cdots \ni x\}$ および連続写像 $\exists h : U_0 \times I \rightarrow U_0$ で、次を満たすものがとれる。

- $h(U_n \times I) \subset U_n$
- $h(x, t) = x \quad (\forall t \in I)$
- $h(y, 0) = y, h(y, 1) = x \quad (\forall y \in U_0)$

これを用いて、 $H : \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \rightarrow \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ を、次の合成に対応する射として定義する。

$$\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times I \times U_n \xrightarrow{id \times h} \mathcal{F}(U_n)^{U_n} \times U_n \xrightarrow{\text{標準的な射}} \mathcal{F}(U_n)$$

これにより、 $\mathcal{F}(U_n)^{U_n} \rightarrow \mathcal{F}(U_n)^x \cong \mathcal{F}(U_n)$ は $\mathcal{F}(U_n) \rightarrow \mathcal{F}(U_n)^{U_n}$ のホモトピー逆射である。これらの順極限をとることにより、 $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*(x \in B)$ はホモトピー同値であることがわかる。□

注意 2.2.7. 上記の証明は、 D^n を任意の位相空間に置き換えてもそのまま成立する。つまり、 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ は実際には Hurewicz ファイブレーションである。

補題 2.2.8. B を σ -コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体 (e.g. 多様体)、 Ω を B 上のしなやかな層とする。もし任意の $\forall x \in B$ に対して茎 Ω_x が弱可縮 (i.e. 一点集合と弱ホモトピー同値) ならば、 $\Omega(B)$ は弱可縮である。

証明.

Step.1 $B = I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ の場合

$\Omega(B) \rightarrow *$ が弱ホモトピー同値であることを示すため、次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} & \xrightarrow{\alpha} & \Omega(B) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & * \end{array}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にすることを示せばよい。

任意の $\forall x \in B$ に対し、 $S^{m-1} \xrightarrow{\alpha} \Omega(B) \rightarrow \Omega_x$ なる合成を α_x と表す。 $\Omega_x \rightarrow *$ が弱ホモトピー同値だから、次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 γ_x が存在し、図式の上三角を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} & \xrightarrow{\alpha_x} & \Omega_x \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma_x & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & * \end{array}$$

1.5.9 より、十分小さい x の開近傍 U_x が存在して、 α_x, γ_x を次のように持ち上げられる。

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_x} & \Omega(U_x) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\gamma}_x & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\gamma_x} & \Omega_x \end{array}$$

1.5.9 より、 $\tilde{\alpha}_x$ は $S^{n-1} \xrightarrow{\alpha} \Omega(B) \rightarrow \Omega(U_x)$ なる合成としてよい。 $\tilde{\gamma}_x$ 達を貼り合わせて γ を構成したいのだが、このままでは貼り合わない。そこで、貼り合うように上手く変形させたい。

$\{U_x\}_x$ は B を被覆する。 $B = I$ であることを用いて、 $\{U_x\}_x$ の細分 $\{B_0, B_1, \dots, B_N\}$ で、次を満たすものがとれる。

- $0 \in B_0, 1 \in B_N$
- $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$

各 i に対し、 $B_i \subset U_x$ なる x を一つ選び、 $\tilde{\alpha}_x, \tilde{\gamma}_x$ と $\Omega(U_x) \rightarrow \Omega(B_i)$ の合成を α_i, γ_i と表す。 γ_0 を上手く変形して γ_1 と貼り合うことを示せば、同様にして帰納的にすべて張り合わせるができる。

$x \in B_0 \cap B_1$ を一つとる。 $\partial h : \partial(D^n \times I) \rightarrow \Omega_x$ を、 $\partial h|_{D^n \times \{0\}} = \gamma_{0,x}, \partial h|_{D^n \times \{1\}} = \gamma_{1,x}, \partial h|_{(\partial D^n) \times I} = \alpha_x$ によって定める。ただし、 $\gamma_{i,x}$ は γ_i と $\Omega(B_i) \rightarrow \Omega_x$ の合成である。 $\Omega_x \rightarrow *$ が弱ホモトピー同値だから、次のような四角形の可換図式に対し、斜めに横断する射 h が存在し、図式の上三角を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \partial(D^n \times I) \cong S^n & \xrightarrow{\partial h} & \Omega_x \\ \downarrow & \nearrow \exists h & \downarrow \\ D^n \times I \cong D^{n+1} & \longrightarrow & * \end{array}$$

Ω はしなやかだから、次の図式を可換にする H が存在する。

$$\begin{array}{ccc} (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \cong D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\gamma_{0,x} \cup \alpha} & \Omega([0, x]) \\ \downarrow & \nearrow \exists H & \downarrow \\ D^n \times I \cong D^n \times I & \xrightarrow{h} & \Omega_x \end{array}$$

$\gamma'_0 \stackrel{\text{def}}{=} H(-, 1) : D^n \rightarrow \Omega([0, x])$ と定めると、 $\gamma'_0|_{S^{n-1}} = \alpha, \gamma'_{0,x} = \gamma_{1,x}$ である。ただし、 $\gamma'_{0,x}$ は γ'_0 と $\Omega([0, x]) \rightarrow \Omega_x$ の合成である。これにより、 γ'_0, γ_1 は上手く貼り合う。

Step.2 B がコンパクトで、区分的に線形な埋め込み $B \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する場合

n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ の時、Step.1 より成立。 n で成立すると仮定して、 $n + 1$ で成立することを示す。

線形な射影 $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ の B への制限を p とする。 $p|_B$ は固有だから、 $p(B)$ 上の層 $p_*\Omega$ はしなやかである。また、各 $x \in p(B)$ に対し、 $p_*\Omega_x = \Omega(p^{-1}(x))$ である。帰納法の仮定より、 $p_*\Omega_x = \Omega(p^{-1}(x))$ は弱可縮である。よって、 $p_*\Omega$ に Step.1 を適用すれば、 $\Omega(B) = p_*\Omega(p(B))$ は弱可縮である。

Step.3 一般の場合

コンパクトな部分複体の列 $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B$ で、 $B = \bigcup B_k$ なるものをとる。各 B_k は区分的に線形な埋め込み $B_k \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ を持つので、 $\Omega(B_k)$ は弱可縮である。 Ω はしなやかなから、Serre ファイブレーションの列 $\dots \rightarrow \Omega(B_1) \rightarrow \Omega(B_0)$ がとれる。 Ω は層だから、 $\Omega(B) = \varprojlim_k \Omega(B_k)$ である。よって、 $\Omega(B)$ は弱可縮である。 \square

定理 2.2.9. B を σ -コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体 (e.g. 多様体)、 \mathcal{F} と \mathcal{G} を B 上のしなやかな層とする。この時、射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ について以下は同値である。

- (1) 任意の開集合 $\forall U \subset B$ に対し、 $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ は弱ホモトピー同値である。
- (2) 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ は弱ホモトピー同値である。

証明. • (1) \Rightarrow (2)

次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_x \\
 \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow f_x \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{G}_x
 \end{array}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

1.5.9 より、十分小さい x の開近傍 U および二つの仮想的連続写像 $\tilde{\alpha} : S^{n-1} \rightarrow \mathcal{F}(U)$, $\tilde{\beta} : D^n \rightarrow \mathcal{G}(U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}(U) & & \\
 & & \nearrow \tilde{\alpha} & & \searrow \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_x & & \\
 \downarrow & & \downarrow f_U & & \downarrow f_x \\
 & & \mathcal{G}(U) & & \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{G}_x & & \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\beta} & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

$f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ は弱ホモトピー同値であるから、次のような四角形の可換図式において、斜めに横断する射 $\tilde{\gamma}$ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にする

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{F}(U) \\
 \downarrow & \nearrow \exists \tilde{\gamma} & \downarrow f_U \\
 D^n & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{G}(U)
 \end{array}$$

$D^n \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。

- (2) \Rightarrow (1)

各開集合 $U \subset B$ に対して、 $P(\mathcal{G})(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(U)^I$ とすると、 $P(\mathcal{G})$ は層である。さらに、 $\tilde{\mathcal{F}}$ を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(\mathcal{G}) & \xrightarrow{ev_0} & \mathcal{G} \end{array}$$

ただし、 ev_t は $\{t\} \subset I$ が導く射である。また、 $I \rightarrow *$ が導く $\mathcal{G} \rightarrow P(\mathcal{G})$ と f の合成を μ として、ホモトピー同値 $id \times \mu : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ が定まる。 $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} ev_1 \circ pr_2 : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ とすると、次の可換図式ができる。

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{F}} & \\ & \uparrow \simeq & \searrow \tilde{f} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \end{array}$$

各 \tilde{f}_U は Serre ファイブレーションである。よって、 \mathcal{G} がしなやかであることから、 $\tilde{\mathcal{F}}$ もしなやかであることが簡単にわかる。 \tilde{f}_U が弱ホモトピー同値であればよいが、ホモトピー長完全列を考えれば、 \tilde{f}_U のファイバーが弱可縮であればよい。そこで、 $* \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を一つ固定して、 U 上の層 Ω を次の引き戻し図式で定める。

$$\begin{array}{ccc} \Omega(W) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_W \\ * & \longrightarrow & \mathcal{G}(W) \end{array}$$

\mathcal{F}, \mathcal{G} がしなやかであることと、各 $ev_0 : P(\mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ が Serre ファイブレーションであることから、 Ω もしなやかであることが簡単にわかる。よって??に帰着される。□

系 2.2.10. B を σ -コンパクトかつ局所有限な有限次元単体複体 (e.g. 多様体)、 \mathcal{F} を \mathbf{vTop} に値を持つ B 上の層とする。 \mathcal{F} がしなやかならば、 \mathcal{F} はパラメトリック h -原理を満たす。

2.2.3 再考： \mathcal{F}^* の定義

B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{vTop} に値を持つ B 上の層とする。

まず、 B 上の前層 \mathcal{F}^\square を $\mathcal{F}^\square(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U)^U$ によって定める。ここから出発して \mathcal{F}^* の定義を見直す。

各開集合 $U \subset B$ に対し、被覆の圏 $Cov(U)$ が定まる。自己関手 $\mathcal{R} : Cov(U) \rightarrow Cov(U)$ を $\mathcal{R}(\{U_i \subset U\}) \stackrel{\text{def}}{=} \{U_i \cap U_j \subset U\}$ によって定める。この時、二つの標準的な自然変換 $\mathcal{R} \Rightarrow Id$ が取れる。反変関手 $P^n = P_{\mathcal{F}^\square}^n : Cov(U)^{op} \rightarrow \mathbf{vTop}$ を $P^1(\{U_i\}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \mathcal{F}^\square(U_i)$,

$P^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} P^n \circ \mathcal{R}$ によって定める。これを用いて、 $K = K_{\mathcal{F}^\square}$ を、図式 $P^1 \rightrightarrows P^2$ の差核として定める。以上の準備により、 $\mathcal{F}^*(U) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{\text{Cov}(U)} K|_{\text{Cov}(U)}$ と書ける。これはプラス構成そのものである。(c.f. 1.2.2) まとめると次の命題が成り立つ。

命題 2.2.11. $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^\square)^+$

これを踏まえ、一般に次の定義をする。

定義 2.2.12. B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。

\mathcal{F}^\square の層化を \mathcal{F}^* と書く。これを \mathcal{F} の形式的な切断の層と呼ぶ。対比して、 \mathcal{F} を厳密な切断の層と呼ぶ。

もちろんこれは、 \mathcal{F} が \mathbf{vTop} に値を持つとき、元の定義と一致する。命題?? と全く同様に、次が成り立つ。

補題 2.2.13. B を局所有限な単体複体 (e.g. 多様体)、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。

1. $(\mathcal{F}^\square)^+$ はしなやかかつ分離的な前層である。
2. $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{F}^\square)^+$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \rightarrow (\mathcal{F}^\square)^+_x (x \in B)$ はホモトピー同値である。

命題 2.2.14. B を局所コンパクトな正規空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の前層とする。 \mathcal{F} がしなやかならば、 \mathcal{F}^+ もしなやかである。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 $\forall K \subset^\vee L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^+(L) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}^+(K) \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

?? と同様の議論により、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L (U \subset W)$ とそれぞれの開被覆 $\{U_x \subset U\}_{x \in U}, \{W_x \subset W\}_{x \in W} (x \in U_x \subset W_x)$ および四つのホモトピー的射 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \rightarrow \mathcal{F}^+(W), \tilde{\beta} : D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}^+(U), \bar{\alpha} : D^n \times \{0\} \rightarrow K(\{W_x\}),$

$\bar{\beta} : D^n \times I \rightarrow K(\{U_x\})$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 K(\{W_x\}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}^+(W) & & \\
 \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \downarrow & \searrow & \\
 & D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^+(L) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 K(\{U_x\}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}^+(U) & & \\
 \downarrow & \nearrow \bar{\beta} & \downarrow & \searrow & \\
 & D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}^+(K) &
 \end{array}$$

ここで、 $K(\{W_x\})$, $K(\{U_x\})$ は次の図式の各行が差核となるように定義されている。

$$\begin{array}{ccccc}
 K(\{W_x\}) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(W_x) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(W_x \cap W_y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K(\{U_x\}) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_x) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(U_x \cap U_y)
 \end{array}$$

$x \notin U$ のとき、 $\mathcal{F}(W_x) \rightarrow *$ は Serre ファイブレーションである。もしも $x \in U$ のとき $\mathcal{F}(W_x) \rightarrow \mathcal{F}(U_x)$ が Serre ファイブレーションならば、 $\prod \mathcal{F}(W_x) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_x)$ は Serre ファイブレーションである。さらに、上図の左の四角は引き戻しだから、 $K(\{W_x\}) \rightarrow K(\{U_x\})$ は Serre ファイブレーションであり、証明は終わる。

問題は、 $x \in U$ のとき $\mathcal{F}(W_x) \rightarrow \mathcal{F}(U_x)$ が Serre ファイブレーションであるとは言えない点である。しかし、 B は局所コンパクトな正規空間だから、相対コンパクトな開集合系 $\{U'_x \Subset U_x\}$, $\{W'_x \Subset W_x\}$ ($x \in U'_x \subset W'_x$) がとれる。そこで、 $\mathcal{F}(W_x) \rightarrow \mathcal{F}(U_x)$ のかわりに $\mathcal{F}(cl(W'_x)) \rightarrow \mathcal{F}(cl(U'_x))$ (cl は閉包作用素) で置き換えれば、 \mathcal{F} がしなやかであるという仮定より、これは Serre ファイブレーションである。□

以上を合わせて、命題??が拡張される。

命題 2.2.15. B を局所有限な単体複体 (e.g. 多様体)、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。

1. 形式的な切断の層 \mathcal{F}^* はしなやかである。
2. $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が導くすべての茎の間の射 $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*$ ($x \in B$) はホモトピー同値である。

2.2.4 圧縮可能性としなやかな層の特徴づけ

定義 2.2.16. B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。

部分集合 $B_0 \subset B$ に対し、 \mathcal{F} の B_0 上の変形 (deformation) とは、有限単体複体 P と射 $h : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(B_0)$ の組 $h = (h, P)$ のことである。開集合 $U \subset B$ およびコンパクト集合

$K \subset U$ に対し、 \mathcal{F} の U 上の変形 $h : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ が K -圧縮可能 (K -compressible) であるとは、次を満たす $\tilde{h} : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ が存在することである。(この \tilde{h} を h の K -圧縮 (K -compression) と呼ぶ。)

- $h|_{P \times \{0\}} = \tilde{h}|_{P \times \{0\}}$
- K を含む開集合 $\exists U_0 \in U$ (i.e. $cl(U_0) \subset U$) が存在して、次の合成は $t \in I$ によらない。

$$P \times I \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U - cl(U_0))$$

- K を含む開集合 $\exists U_1 \subset U$ が存在して、次の二つの合成は一致する。

$$P \times I \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\tilde{h}} \end{array} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U_1)$$

命題 2.2.17. B を局所コンパクトな正規空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。 \mathcal{F} がしなやかであるための必要十分条件は、任意の開集合 $\forall U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $\forall K \subset U$ に対し、 \mathcal{F} の U 上の任意の変形が K -圧縮可能であることである。

証明. \mathcal{F} がしなやかであると仮定する。任意の開集合 $U \subset B$ 、任意のコンパクト集合 $K \subset U$ および \mathcal{F} の U 上の任意の変形 $h : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ をとる。これから示すのは、 h が K -圧縮可能であることである。

開集合 $U_0, U_1 \subset U$ で、 $K \subset U_1 \in U_0 \in U$ かつ $cl(U_0)$ がコンパクトなものをとる。 B は正規空間だから、 $cl(U_1)$ と ∂U_0 は開集合 $V_1 \supset cl(U_1)$ と $V_0 \supset \partial U_0$ によって分離可能である。(さらに $V_0, V_1 \subset U$ としてよい。) これにより $h' : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(V_0 \amalg V_1) \cong \mathcal{F}(V_0) \times \mathcal{F}(V_1)$ が $P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V_1)$ と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V_0)$ の積として導かれる。 \mathcal{F} がしなやかであることから、 h' は $cl(U_0)$ を含む開集合 $V \subset U$ 上に拡張できる。(i.e. $h' : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(V)$ と見なせる。) これは次を満たすようにできる。

- $h|_{P \times \{0\}} = h'|_{P \times \{0\}}$
- 次の合成は $t \in I$ によらない。

$$P \times I \xrightarrow{h'} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V - cl(U_0))$$

- 次の二つの合成は一致する。

$$P \times I \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U_1)$$

そこで、 \tilde{h} を h' と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U - cl(U_0))$ の貼り合わせとして定義すればよい。

逆に、任意の開集合 $U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対し、 \mathcal{F} の U 上の任意の変形が K -圧縮可能であると仮定する。 \mathcal{F} がしなやかであることを示すため、任意の二つのコンパクト部分集合 $\forall K \subset \forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}(L) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}(K) \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.9 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$ ($U \subset W$) と次の図式を考えればよい。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{F}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

β' の K -圧縮 $\tilde{\beta}: D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ をとる。 K -圧縮の定義の $U_0 \Subset U$ をとる。 $\gamma': D^n \times I \rightarrow \mathcal{F}(W)$ を β' と $P \times I \xrightarrow{id \times 0} P \times \{0\} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W - U_0)$ の貼り合わせとして定める。最後に、 $P \times I \xrightarrow{\gamma'} \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(L)$ なる合成を γ とすればよい。□

また、微小的しなやかな層も全く同様にして同様に特徴づけできる。

命題 2.2.18. B を局所コンパクトな正規空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。 \mathcal{F} が微小的しなやかであるための必要十分条件は、任意の開集合 $\forall U \subset B$ 、任意のコンパクト集合 $\forall K \subset U$ および \mathcal{F} の U 上の任意の変形 $\forall h: P \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ に対し、 $\exists \epsilon > 0$ で、 $h|_{P \times [0, \epsilon]}$ が K -圧縮可能となるものが存在することである。

一方、以下の条件は ϵ を U によらず選べるという意味で、微小的しなやかよりも強いことに注意する。(実際には圧縮可能性と同値である。)

定義 2.2.19. B を位相空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。

コンパクト集合 $K \subset B$ に対し、 \mathcal{F} の K 上の変形 $h: P \times I \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が K -微小圧縮可能 (K -microcompressible) であるとは、次を満たす $\exists \epsilon > 0$ が存在することである。

- K を含む十分小さい開集合 $U \supset K$ および持ち上げ $h|_{P \times [0, \epsilon]}: P \times [0, \epsilon] \rightarrow \mathcal{F}(U)$ に対して、 $h|_{P \times [0, \epsilon]}$ は K -圧縮可能である

命題 2.2.20. B を局所コンパクトな正規空間、 \mathcal{F} を \mathbf{hTop} に値を持つ B 上の層とする。任意のコンパクト集合 $\forall K \subset B$ に対し \mathcal{F} の K 上の任意の変形が K -微小圧縮可能ならば、 \mathcal{F} はしなやかである。

証明. 任意の開集合 $\forall U \subset B$ および任意のコンパクト集合 $\forall K \subset U$ に対し、 \mathcal{F} の U 上の任意の変形 $\forall h : P \times I \rightarrow \mathcal{F}(U)$ が K -圧縮可能であることを示せばよい。

$\phi(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \min(1, s + t)$ として、 $P \times I \times I \xrightarrow{id \times \phi} P \times I \xrightarrow{h} \mathcal{F}(U)$ なる合成を h' とおく。 $P \times I \times I \xrightarrow{h'} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ は K -微小圧縮可能だから、次を満たす $\exists \epsilon > 0$ が存在する。

- K を含む十分小さい開集合 $U' \supset K$ に対して、 $P \times I \times [0, \epsilon] \xrightarrow{h'} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ は K -圧縮 \tilde{h}' をもつ。

$\psi_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} (s, t - s)$ として、 $P \times [s, \phi(s, \epsilon)] \xrightarrow{id \times \psi_s} P \times I \times [0, \epsilon] \xrightarrow{\tilde{h}'} \mathcal{F}(U')$ なる合成を $\tilde{h}_s = \tilde{h}'_s$ とおく。 \tilde{h}_s は $h|_{P \times [s, \phi(s, \epsilon)]}$ の (U' 上の) K -圧縮である。

$N > \frac{1}{\epsilon}$ なる自然数 N を固定する。大雑把に言えば、 $\tilde{h}_0, \tilde{h}_{\frac{1}{N}}, \dots, \tilde{h}_{\frac{N-1}{N}}$ を貼り合わせて h の K -圧縮を構成したい。そこで、境界で上手く貼り合うように U' を小さくとりなおしていく必要がある。具体的には次のようにとる。

$\tilde{h}_0, \tilde{h}_{\frac{1}{N}}, \dots, \tilde{h}_{\frac{N-1}{N}}$ まで貼り合わせて、 $h|_{P \times [0, \frac{i}{N}]}$ の (U' 上の) K -圧縮 $\tilde{h}|_{P \times [0, \frac{i}{N}]}$ が構成できたとする。今、十分小さい $U'' \subset U'$ 上で $\tilde{h}|_{P \times \{\frac{i}{N}\}}$ と $h|_{P \times \{\frac{i}{N}\}}$ は一致する。そこで、この U'' について $\tilde{h}_{\frac{i}{N}} = \tilde{h}^{U''}_{\frac{i}{N}}$ をとる。 $\tilde{h}|_{P \times \{\frac{i}{N}\}} = h|_{P \times \{\frac{i}{N}\}}$ と $\tilde{h}_{\frac{i}{N}}|_{P \times \{\frac{i}{N}\}}$ は (U'' 上で) 一致する。 $\tilde{h}_{\frac{i}{N}}$ は $U' - U''$ 上では $\tilde{h}|_{P \times \{\frac{i}{N}\}}$ と一致するように U' 上に拡張できる。これによって、 $\tilde{h}|_{P \times [0, \frac{i}{N}]}$ と $\tilde{h}_{\frac{i}{N}}$ を貼り合わせて $\tilde{h}|_{P \times [0, \frac{i+1}{N}]}$ が構成できる。□

2.3 応用

2.3.1 ジェット束と層理論的 h-原理

$f : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。

命題 2.3.1. $\Gamma(R; -)$ はしなやかである。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 $\forall K \subset \forall L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(R; L) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(R; K) \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

1.5.9 より、十分小さい二つの開集合 $U \supset K, W \supset L$ ($U \subset W$) および二つの擬連続写

像 $\tilde{\alpha} : D^n \times \{0\} \rightarrow \Gamma(R; W)$, $\tilde{\beta} : D^n \times I \rightarrow \Gamma(R; U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma(R; W) & & \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow & \searrow & \\
 D^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(R; L) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D^n \times I & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(R; U) & \searrow & \Gamma(R; K) \\
 & \nearrow \tilde{\beta} & & &
 \end{array}$$

$\tilde{\alpha}' : D^n \times \{0\} \times W \rightarrow R$, $\tilde{\beta}' : D^n \times I \times U \rightarrow R$ を $\tilde{\alpha}'(x, 0, p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}(x, 0)(p)$, $\tilde{\beta}'(x, t, p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\beta}(x, t)(p)$ で定めると、これは連続である。

今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \rightarrow I$ で、 K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、 $\phi : D^n \times I \times U \rightarrow D^n \times I \times U$ を $\phi(x, t, p) \stackrel{\text{def}}{=} (x, t\delta(p), p)$ として定める。また、 $W' \stackrel{\text{def}}{=} W - \text{supp}(\delta)$ として、 $\psi : D^n \times I \times W' \rightarrow D^n \times \{0\} \times W'$ を $\psi(x, t, p) \stackrel{\text{def}}{=} (x, 0, p)$ として定める。 $\tilde{\beta}' \circ \phi$ と $\tilde{\alpha}' \circ \psi$ は上手く貼り合せて、 $\tilde{\gamma}' : D^n \times I \times W \rightarrow R$ を定める。 $\tilde{\gamma} : D^n \times I \rightarrow \Gamma(R; W)$ を $\tilde{\gamma}(x, t)(p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\gamma}'(x, t, p)$ で定め、 $D^n \times I \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \Gamma(R; W) \rightarrow \Gamma(R, L)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。□

各開集合 $U \subset B$ に対し、 $\tau' : \text{Sol}(R; U)^U \rightarrow \Gamma(R; U)$ を次のように定める。各 $s \in \text{Sol}(R; U)^U$ は、連続写像 $s : U \times U \rightarrow E; (x, y) \mapsto s^x(y)$ で、任意の x に対して $s^x \in \text{Sol}(R; U)$ なるものである。 $j^r s : U \times U \rightarrow R$ を、 $j^r s(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} j^r(s^x)(y)$ によって定めると、これは連続である。そこで、対角写像 $U \rightarrow U \times U$ と $j^r s$ の合成を $\tau'(s) : U \rightarrow R$ とする。

τ' の集まりは $\tau : \text{Sol}(R; -)^* \rightarrow \Gamma(R; -)$ を導く。これは、次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Sol}(R; -)^* & \xrightarrow{\tau} & \Gamma(R; -) \\
 \Delta \uparrow & \nearrow & \\
 \text{Sol}(R; -) & &
 \end{array}$$

命題 2.3.2. R は開とする。任意の開集合 $\forall U \subset B$ に対し、 $\tau_U : \text{Sol}(R; U)^* \rightarrow \Gamma(R; U)$ は弱ホモトピー同値である。

証明. ??より、任意の $\forall p \in B$ に対し、 $\tau_p : \text{Sol}(R; p)^* \rightarrow \Gamma(R; p)$ が弱ホモトピー同値であることを示せばよい。そのため、 $\tau_p \circ \Delta_p : \text{Sol}(R; p) \rightarrow \Gamma(R; p)$ が弱ホモトピー同値であ

ることを示せばよい。次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Sol}(R; p) \\
 \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(R; p)
 \end{array}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々ホモトピックで可換にすることを示せばよい。

1.5.9 より、十分小さい p の開近傍 U および二つの擬連続写像 $\tilde{\alpha} : S^{n-1} \rightarrow \text{Sol}(R; U)$, $\tilde{\beta} : D^n \rightarrow \Gamma(R; U)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Sol}(R; U) & & \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \uparrow & \searrow & \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Sol}(R; p) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(R; U) & \searrow & \Gamma(R; p) \\
 & & \uparrow \tilde{\beta} & & \\
 & & \Gamma(R; p) & &
 \end{array}$$

U を座標近傍としてとれば、 $U \subset \mathbb{R}^m$ としてよい。各 $x \in D^n$ に対して $\tilde{\beta}(x)(p) = j_p^r s^x \in R$ と表す。 R は開だから、 U を小さく取り直せば $x \mapsto (q \mapsto j_q^r s^x)$ は再び $D^n \rightarrow \Gamma(R; U)$ を定める。さらに U を小さく取り直せばこれは $\tilde{\beta}$ とホモトピックである。 $\tilde{\gamma} : D^n \rightarrow \text{Sol}(R; U)$ を $\tilde{\gamma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} s^x$ で定め、 $D^n \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \text{Sol}(R; U) \rightarrow \text{Sol}(R; p)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。 \square

系 2.3.3. R は開とする。

層 $\text{Sol}(R; -)$ が h -原理を満たすための必要十分条件は、 R が任意の開集合 $U \subset B$ 上で h -原理を満たすことである。

層 $\text{Sol}(R; -)$ がパラメトリック h -原理を満たすための必要十分条件は、 R が任意の開集合 $U \subset B$ 上でパラメトリック h -原理を満たすことである。

関連図書

- [1] John Baez and Alexander Hoffnung. Convenient categories of smooth spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(11):5789–5825, 2011.
- [2] P Frejlich. *h-principles around Poisson geometry*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Instituto Superior Tecnico, 2011.
- [3] Misha Gromov. *Partial differential relations*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Philip S Hirschhorn. The quillen model category of topological spaces. *arXiv preprint 1508.01942*, 2015.
- [5] Ivan Kolár, Jan Slovák, and Peter W Michor. Natural operations in differential geometry. 1999.
- [6] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Daniel G Quillen. *Homotopical algebra*, volume 43. Springer, 2006.
- [8] G Sardanashvily. Fibre bundles, jet manifolds and lagrangian theory. lectures for theoreticians. *arXiv preprint arXiv:0908.1886*, 2009.
- [9] Dannie J Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142. Cambridge University Press, 1989.
- [10] Edwin Spanier et al. Quasi-topologies. *Duke Mathematical Journal*, 30(1):1–14, 1963.