

ホモトピー原理 (h-principle)

山崎 晃司 東京工業大学

2021年10月16日

記号一覧

Set : 集合と写像の圏

sSet : 単体的集合の圏

Top : 位相空間と連続写像の圏

Mfd : 滑らかな多様体と滑らかな写像の圏

PSh(\mathcal{U}) = **PSh**($\mathcal{U}; \mathbf{Set}$) : (集合を値に持つ) \mathcal{U} 上の前層と自然変換の圏

Sh(\mathcal{U}) = **Sh**($\mathcal{U}; \mathbf{Set}$) : (集合を値に持つ) \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏

PSh($\mathcal{U}; \mathcal{C}$) : 圏 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の前層と自然変換の圏

PSh $_{\ast}$ ($\mathcal{U}; \mathcal{C}$) : 圏 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の添加前層と自然変換の圏

Sh($\mathcal{U}; \mathcal{C}$) : 圏 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層と自然変換の圏

pqTop : 前擬位相空間と前擬連続写像の圏

qTop : 擬位相空間と擬連続写像の圏

\mathcal{U}_U : \mathcal{U} の U 上のスライス圏

(F/G) : 関式 $\cdot \xrightarrow{F} \cdot \xleftarrow{G} \cdot$ のコマ圏

$\mathbf{Nat}(-, -)$: 自然変換の集合

$F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$: 左随伴関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と右随伴関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ からなる随伴

$\mathbf{Sing}^q(X)$: 位相空間 X に付随する擬位相空間

目次

第 0 章 導入	7
0.1 ホモトピー原理とは？	8
0.2 ホモトピー原理の萌芽	9
0.2.1 岡の原理と Grauert の定理	9
0.2.2 Nash の埋め込み定理	10
0.2.3 Hirsch-Smale のホモトピー原理	10
0.2.4 Phillips のホモトピー原理	11
0.3 偏微分関係と Gromov のホモトピー原理	11
0.3.1 Jet 束	11
0.3.2 偏微分関係	13
0.3.3 Gromov のホモトピー原理	13
0.3.4 層理論的ホモトピー原理	14
0.4 亜群と Haefliger のホモトピー原理	16
0.4.1 擬群と亜群	16
0.4.2 Haefliger のホモトピー原理	17
0.5 Stein 位相と岡-Grauert の原理	18
第 1 章 一般化された空間とホモトピー	21
1.1 擬位相空間	21
1.1.1 前擬位相空間	21
1.1.2 擬位相空間	22
1.1.3 幾何学的実現	22
1.1.4 貼り合わせ補題	23
1.2 モデル構造	24
1.2.1 前擬位相空間のモデル構造	25
1.2.2 擬位相空間のモデル構造	28
1.3 擬位相空間のホモトピー論	30
第 2 章 連続層と可撓層	35
2.1 連続層	35
2.2 可撓層と可撓拡張	35
2.3 弱可撓層	36

2.4	モデル構造	40
2.4.1	舞台となる圏の拡張	40
2.4.2	コンパクト可撓モデル構造	42
2.4.3	各点射影的モデル構造	45
2.4.4	各点可撓モデル構造	46
2.5	形式的切断の層	47
2.5.1	形式的切断の層	47
2.5.2	Gromov の補題	48
2.5.3	偏微分関係の解の層	49
2.6	ABC 前束構造	52
2.6.1	可撓蹟	53
2.6.2	ABC 前束構造の存在	55
付録 A 圏論からの準備		59
A.1	圏論の基礎事項と記法	59
A.1.1	圏と関手	59
A.1.2	米田の補題	59
A.1.3	コンマ圏	59
A.2	エンドとコエンド	59
A.2.1	楔とエンド	59
A.2.2	捻射圏	59
A.3	Kan 拡張	59
A.3.1	各点 Kan 拡張	59
A.3.2	コエンドによる表現	59
A.3.3	米田拡張と随伴	59
A.4	平坦関手	59
A.4.1	平坦関手	60
A.4.2	表現平坦関手	61
付録 B グロタンディーク位相と層		63
B.1	Grothendieck 位相と景	63
B.2	景上の層	64
B.2.1	層	64
B.2.2	プラス構成と層化	65
B.2.3	層の圏	67
B.3	G-位相空間	71
B.3.1	G-位相空間	71
B.3.2	G-位相空間の射	73
B.3.3	コンパクト性とパラコンパクト性	73

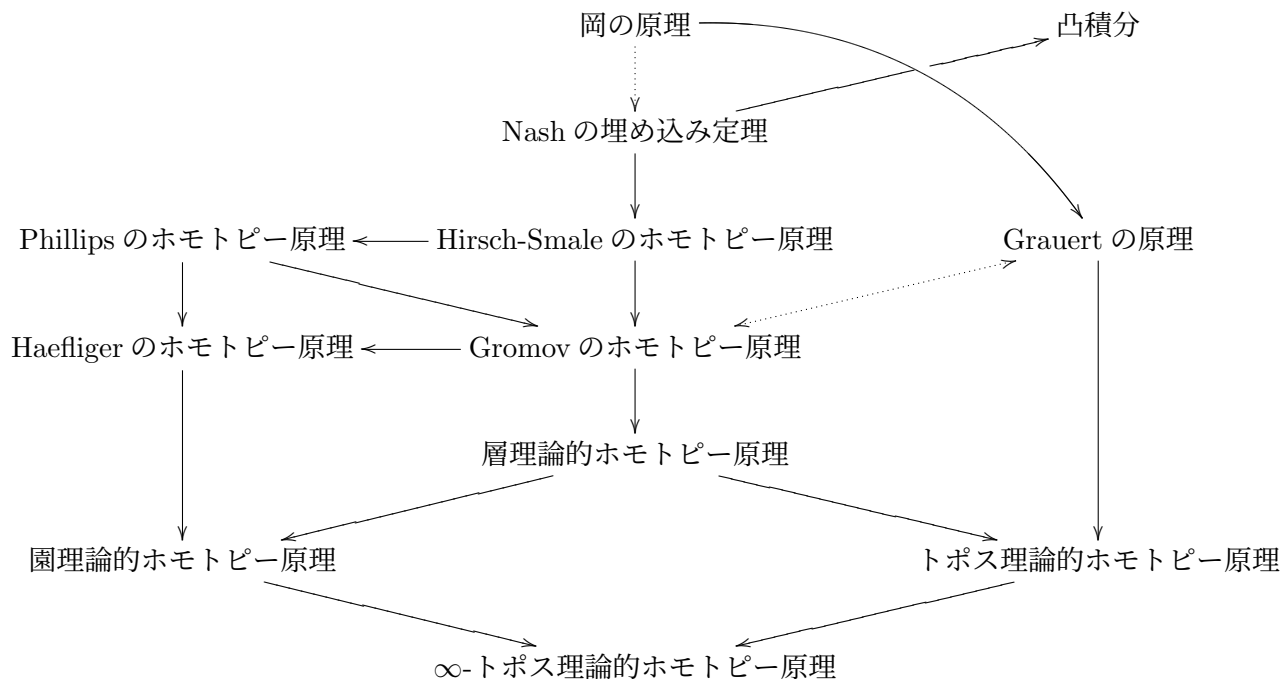
B.3.4	分離性	74
B.4	G-位相空間上の層	75
B.4.1	G-位相空間上の層	75
B.4.2	十分多くの点を持つ場合	77
B.4.3	位相空間との比較	78
B.5	位相空間上の層	79
B.5.1	位相空間上の層	79
B.5.2	十分多くの点を持つ場合	80
付録 C	モデル圏とホモトピー	83
C.1	準備	83
C.1.1	リフト性質と弱分解系	83
C.1.2	超限合成と相対セル複体	86
C.1.3	小対象指数	89
C.2	モデル圏	92
C.2.1	モデル圏	92
C.2.2	ホモトピー	93
C.2.3	(余)束対象と(余)束置換	97
C.2.4	ホモトピー圏	101
C.2.5	導来関手	103
C.2.6	Quillen 随伴と Quillen 同値	105
C.2.7	ホモトピー極限	111
C.3	余束生成モデル圏	111
C.3.1	余束生成モデル圏	112
C.3.2	推移定理	113
C.3.3	関手圏のモデル構造	115
C.4	デカルト閉モデル圏	116
C.5	ホモトピー極限と正則モデル圏	120
C.5.1	ホモトピー積	120
C.5.2	ホモトピー引き戻し	121
C.5.3	正則モデル圏	125
C.6	混合モデル圏	127
付録 D	Lie 亜群	131
D.1	位相亜群	131
D.1.1	位相亜群	131
D.1.2	分類空間	131
D.2	Lie 亜群	131
付録 E	圏	133

第0章 導入

ホモトピー原理 (homotopy principle) または h-principle とは、トポロジーの手法を応用して偏微分不等式/方程式の問題を解く強力な道具である。岡潔 [18] は Cousin 問題解決の中で、ある種の複素解析的問題の可解性が位相的問題の可解性に帰着されることを示した。これは現在では岡の原理 (Oka principle) と呼ばれているものだが、ここに既にホモトピー原理の哲学の萌芽があったと言える。岡の原理のアイデアは後に Grauert [6] によって非可換の場合まで拡張される。一方、代数幾何の方面では Cartan らの手によって“接続層”の理論として発展していくことになるのだが、こちらはあまり触れないことにする。岡の原理が Nash の研究に影響を与えたかどうかは定かではないが、Nash の埋め込み定理 [16] の証明の中で、解析的問題の可解性を位相的問題の可解性に帰着するというアイデアが再び現れる。これは後に Hirsch [10] や Smale [27, 26] らの研究へ直接影響を与え、多様体のはめ込みに関するホモトピー原理として、ホモトピー原理の原型がここに完成する。これは現在では Hirsch-Smale のホモトピー原理と呼ばれている。Hirsch-Smale のホモトピー原理や、後の Phillips [19] のホモトピー原理を完全に包含する形で、Gromov [7] は偏微分不等式に関するホモトピー原理を証明した。これが Gromov のホモトピー原理である。Gromov [8] はさらに、自身の著書の中で層理論的ホモトピー原理 (sheaf theoretic h-principle) を定義し、Hirsch や Smale らの証明の手法を抽象的に見直した。ここまでが、現在までのホモトピー原理の“理論”として整備されている範囲である。

Haefliger [9] は Gromov-Phillips のホモトピー原理と垂群の分類空間の理論を組み合わせることにより、葉層構造に関するホモトピー原理を示した。Haefliger の定理は Gromov の定理に真に包含されないホモトピー原理のモデルである。一方、岡の原理の直接の一般化である Grauert の原理もまた、Gromov の定理に真に包含されない。しかし、Grauert らの研究は Gromov の研究と互いに影響を与えあう関係になっており、実際、その証明の多くは非常に似通っているし、証明の一部は Gromov 自身によって手が加えられている。(そのため、結果の一部は岡-Grauert-Gromov の原理と呼ばれている。) 私の目標はこれらを統一することだが、2021年9月現在、統一理論はまだ完成していない。そこで本書では、統一理論のアイデアとともに、その困難についてまとめていく。簡単に言えば、Haefliger の定理を統一するためには Gromov 理論を圏化する必要があり、Grauert の原理を統一するためには底空間を位相空間から G -位相空間 (またはトポス) まで拡張する必要があると思われる。ここで、Gromov 理論とは層理論的ホモトピー原理のことであるが、Gromov 理論を圏化するのは層の代わりに園 (stack) を用いるということである。また、層の理論を扱う上で位相空間をトポスに置き換えることもまた自然であろう。本書のキーワードの

関係を図にまとめておこう。



ホモトピー原理のアイデアを遡れば岡の原理に辿り着くが、層のアイデアを遡ればやはり岡による“不定域イデアル”に辿り着く。ここに岡潔の数学が再び合流するのである。

[8]を読んで勉強したことをまとめる予定です。部分的に[5]などを参考にする予定です。

0.1 ホモトピー原理とは？

次の偏微分不等式 R を考える。

$$f(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^r y}{\partial x^r}) > 0 \quad \dots \quad R$$

偏微分方程式でもよいのだが、実用上、偏微分不等式を考えることが多いため、これに倣う。目標は偏微分不等式の解を見つけることである。そこで、問題を次の2ステップに分ける。

1. 偏微分不等式の“形式的解”を見つける。
2. “形式的解”をホモトピーによって厳密解へ変形する。

“形式的解”の詳細な定義には Jet 束を必要とするため、こちらは後回しにするとして、ここでは次のように考えてよいものとする。

定義 0.1.1. 偏微分不等式 R の形式的解 (*formal solution*) とは、 $r + 1$ 個の連続な写像の組 $(s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x))$ で、次を満たすものである。

$$f(x, s(x), s^1(x), s^2(x), \dots, s^r(x)) > 0$$

この定義は非常に弱いものであるため、形式的解は多くの場合すぐに見つかる。そのため、形式的解が厳密解へと変形可能かどうかの問題になる。

定義 0.1.2. 偏微分不等式 R がホモトピー原理 (*h-principle*) を満たすとは、任意の形式的解がホモトピーによって厳密解へと変形可能であることを言う。偏微分不等式 R がパラメトリック・ホモトピー原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは、形式的解の空間が厳密解の空間と弱ホモトピー同値であることを言う。

ホモトピー原理を満たすことが解の存在に対応するとすれば、パラメトリック・ホモトピー原理を満たすことは解の (条件に対する) 一意性までをも要求することに対応する。これは非常に強い条件であるが、Gromov は、実用性の高い一般的な条件の下でこの性質を示した。

0.2 ホモトピー原理の萌芽

0.2.1 岡の原理と Grauert の定理

複素多様体 X 上の、至る所で 0 をとらない正則関数の層を \mathcal{O}_X^* と書く。同様に、 X 上の、至る所で 0 をとらない連続関数の層を \mathcal{C}_X^* と書く。層の包含 $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{C}_X^*$ は層係数コホモロジーの間の射 $H^*(X; \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^*(X; \mathcal{C}_X^*)$ を導く。岡の原理は次の形で与えられる。

定理 0.2.1 (岡の原理 [18]). X を *Stein* 多様体とすると、 $H^1(X; \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X; \mathcal{C}_X^*)$ は同型である。

層 \mathcal{O}_X^* は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ正則写像の層と見なせる。同様に、層 \mathcal{C}_X^* は $\mathbb{C}^*(\cong GL_1(\mathbb{C}))$ に値を持つ連続写像の層と見なせる。よって、 $H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$ は X 上の正則複素直線束の正則同型類に一致し、 $H^1(X; \mathcal{C}_X^*)$ は X 上の C^0 -概複素直線束の連続同型類に一致する。すなわち、上記の定理は次のように言い換えることもできる。

系 0.2.2. X を *Stein* 多様体とすると、 X 上の任意の C^0 -概複素直線束に対し、それと同型な正則複素直線束が正則同型を除いてただ一つ存在する。

$GL_1(\mathbb{C})$ はアーベル群であるため、これらの定理の証明には層係数コホモロジーの豊富な技術が使える。一方、一般の $GL_n(\mathbb{C})$ は非可換群である。Grauert は一般の $GL_n(\mathbb{C})$ でも同様の主張がなおも成り立つことを示した。

定理 0.2.3 (Grauert [6]). X を *Stein* 多様体とすると、 X 上の任意の C^0 -概複素ベクトル束に対し、それと同型な正則複素ベクトル束が正則同型を除いてただ一つ存在する。

0.2.2 Nash の埋め込み定理

Nash は任意のリーマン多様体が十分次元の高いユークリッド空間の中へ等長的に埋め込めることを示した。Nash の定理はまず C^1 -級において示され、後に任意の C^r -級でも成り立つように拡張された。 C^1 -級の埋め込みの発見には、次の主張が肝になっている。

定理 0.2.4 (Nash [16]). M をリーマン多様体とする。 $\dim(M) < n$ ならば、 C^1 -等長はめ込み $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。すなわち、 C^1 -等長はめ込みの空間は形式的等長はめ込みの空間と弱ホモトピー同値である。

奇妙に思われるかもしれないが、 C^1 -等長はめ込みは曲率を保たないため、このような可撓性を持つ。一方、 $r \geq 2$ の時はもちろん、 C^r -級等長はめ込みはより窮屈である。 C^r -級埋め込みの発見には、現在では凸積分 (convex integration) と呼ばれる技法が使われる。

定理 0.2.5 (Nash [17]). C^r -等長はめ込みはホモトピー原理を満たす。すなわち、任意の形式的等長はめ込みはホモトピーによって C^r -等長はめ込みへと変形可能である。

0.2.3 Hirsch-Smale のホモトピー原理

Smale によって示された以下の定理は、非数学者の間でも有名である。これはもちろん、数学者にとっても驚くべき結果であった。

定理 0.2.6 (Sphere eversion (Smale [27])). \mathbb{R}^3 内の標準的な二次元球面は、折り曲げることなく (すなわち、はめ込みのホモトピーによって) 裏返すことができる。

上記の定理は、はめ込み $S^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ のホモトピー類を分類した系として得られている。はめ込みのホモトピー類の分類は Smale [26] 自身によって高次元化され、さらに Hirsch [10] によって任意の多様体まで一般化された。多様体のはめ込みのホモトピーの分類は Hirsch-Smale のホモトピー原理と呼ばれている。

Hirsch-Smale のホモトピー原理を正確に述べるため、形式的はめ込みを定義する。 M, N を多様体とする。形式的はめ込み $M \rightarrow N$ とは、連続写像 $f: M \rightarrow N$ と、 f 上の連続なベクトル束の射 $\tilde{f}: TM \rightarrow TN$ の組 (f, \tilde{f}) であって、各点 $x \in M$ ごとに $\tilde{f}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射となるものを言う。はめ込み $M \looparrowright N$ 全体の集合を $\text{Imm}(M, N)$ と書き、形式的はめ込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Imm}^f(M, N)$ と書く。

Hirsch-Smale のホモトピー原理は現代的には以下の形で与えられる。

定理 0.2.7 (Hirsch-Smale のホモトピー原理 (Hirsch [10], Smale [27, 26])). M, N を多様体とする。 $\dim(M) < \dim(N)$ ならば、はめ込み $M \looparrowright N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。すなわち、 $\text{Imm}(M, N) \subset \text{Imm}^f(M, N)$ は弱ホモトピー同値である。

0.2.4 Phillips のホモトピー原理

Smale と Hirsch によってはめ込みの分類が行われた後、その理論を精密化する動きがあった。その一つの結実が Phillips のホモトピー原理である。この頃には既に、ホモトピー原理の現代的な記述が完成している。

Phillips のホモトピー原理を正確に述べるため、形式的沈め込みを定義する。 M, N を多様体とする。形式的沈め込み $M \rightarrow N$ とは、連続写像 $f : M \rightarrow N$ と、 f 上の連続なベクトル束の射 $\tilde{f} : TM \rightarrow TN$ の組 (f, \tilde{f}) であって、各点 $x \in M$ ごとに $\tilde{f} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が全射となるもののことを言う。沈め込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Sub}(M, N)$ と書き、形式的沈め込み $M \rightarrow N$ 全体の集合を $\text{Sub}^f(M, N)$ と書く。

Phillips のホモトピー原理は現代的には以下の形で与えられる。

定理 0.2.8 (Phillips のホモトピー原理 (Phillips [19])). M, N を多様体とする。 M が開ならば、沈め込み $M \rightarrow N$ はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。すなわち、 $\text{Sub}(M, N) \subset \text{Sub}^f(M, N)$ は弱ホモトピー同値である。

0.3 偏微分関係と Gromov のホモトピー原理

Gromov は Hirsch、Smale、Phillips らの研究をさらに進め、偏微分関係の言葉を用いて一般化することに成功した。これにより、ホモトピー原理は特異点論やシンプレクティック幾何などに広範な応用を持つ技術であることが知れ渡るようになった。本節ではまず Jet 束および偏微分関係の定義を述べ、後に Gromov のホモトピー原理の正確な主張を述べる。

0.3.1 Jet 束

滑らかな写像 f の定義域の点 p に置ける r -ジェット $j_p^r f$ とは、値域の点 $f(p)$ から r -階までの偏微分係数の情報を抽出したものである。 r -ジェットをすべて集めると多様体の構造を持ち、これをジェット空間と呼ぶ。また、ファイバー束の切断のジェットを集めると再びファイバー束の構造を持ち、これをジェット束と呼ぶ。

ジェット束の勉強には [13] [25] [24] などが参考になるようである。Wikipedia([Jet \(mathematics\)](#)), [Jet bundle](#)) も十分参考になる。

まずは局所的な場合から定義する。 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、 $f : U \rightarrow V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。各自然数 r に対し、 $D_p^r f : \bigotimes^r \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $D_p^r f(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(p)$ で定める。(ただし、 $\{e_i\}_i$ は標準的な基底である。) これを用いて、多項式写像

$$P_p^r f(\mathbf{x}) = f(p) + \frac{1}{1!} D_p f(\mathbf{x} - p) + \frac{1}{2!} D_p^2 f(\mathbf{x} - p)^{\otimes 2} + \cdots + \frac{1}{r!} D_p^r f(\mathbf{x} - p)^{\otimes r} \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}])^m$$

を定める。

定義 0.3.1. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、 $f : U \rightarrow V$ を十分滑らかな写像とし、点 $p \in U$ をとる。多項式の同値類を値に持つベクトル $j_p^r f(\mathbf{x}) = [P_p^r f(\mathbf{x})] \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(r+1 \text{ 次単項式}))^m$ を f の点 p における r -ジェットと呼ぶ。 $J^r(U, V) = \{j_p^r f | p \in U, f : U \rightarrow V \text{ は滑らかな写像}\}$ を (アフィン) r -ジェット空間 (r -jet space) という。

命題 0.3.2. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、 $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j_p^r(g \circ f) = j_{f(p)}^r g \circ j_p^r f$ である。

証明. Faà di Bruno の公式の言い換えである。具体的には次のように解ける。

Taylor の公式より、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= P_p^r f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \\ g(\mathbf{y}) &= P_{f(p)}^r g(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y} - f(p)|^r) \\ (g \circ f)(\mathbf{x}) &= P_p^r (g \circ f)(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} &P_p^r (g \circ f)(\mathbf{x}) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\mathbf{x}) \\ &= \{P_{f(p)}^r g(P_p^r f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x} - p|^r)) - (P_{f(p)}^r g \circ P_p^r f)(\mathbf{x})\} + o(|f(\mathbf{x}) - f(p)|^r) + o(|\mathbf{x} - p|^r) \\ &= o(|\mathbf{x} - p|^r) \end{aligned}$$

である。これは多項式だから、 r 次以下の項は 0 である。 \square

定義 0.3.3. M, N を多様体、 $f : M \rightarrow N$ を滑らかな写像とし、点 $p \in M$ をとる。 f の点 p における r -ジェット (r -jet) $j_p^r f$ とは、各座標近傍 $(U, \phi) \subset M$, $(V, \psi) \subset N$ ($p \in U$, $f(p) \in V$) に対して $j_{\phi(p)}^r (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \in J^r(U, V)$ を対応させるものである。

$J^r(M, N) = \{j_p^r f | p \in M, f : M \rightarrow N \text{ は滑らかな写像}\}$ を r -ジェット空間 (r -jet space) という。

命題 0.3.4. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ を開集合、 $f : U \rightarrow V$, $g : U \rightarrow W$ を滑らかな写像とする。この時、各点 $p \in U$ に対して $j_p^r (f \times g) = j_p^r f \times j_p^r g \in (\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(r+1 \text{ 次式}))^{m+k}$ である。

定義 0.3.5. $f : E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $s : B \rightarrow E$ を滑らかな切断とし、点 $p \in B$ をとる。 s の点 p における r -ジェット $j_p^r s$ とは、各自明化近傍 $(U, h : f^{-1}(U) \rightarrow F \times U)$ ($p \in U$) に対して $j_p^r (pr_1 \circ h \circ s) \in J^r(U, F)$ を対応させるものである。

$J^r(f) = \{j_p^r s | p \in B, s : B \rightarrow E \text{ は滑らかな切断}\}$ を r -ジェット束 (r -jet bundle) という。

注意 0.3.6. $s : B \rightarrow E$ を写像として見た時のジェットと切断として見たときのジェットは、同じ記号を用いてしまったが、明確に異なる。写像 $M \rightarrow N$ のジェットとは、自明束 $N \times M \rightarrow M$ の切断のジェットと見なせる。

$J^r(M, N)$ は、 $J^r(U, V)$ の集まりを座標近傍系として多様体の構造を持つ。同様に、 $J^r(f)$ は、 $J^r(U, F)$ の集まりを貼り合わせることで多様体の構造を持つ。さらに、 $j_p^r s \mapsto p$ によって自然にファイバー束 $J^r(f) \rightarrow B$ が定まる。ジェット束と言った時、このファイバー束構造を暗に含めることが多い。

$f: E \rightarrow B$ がベクトル束の時、ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ はベクトル束の構造を持つ。

0.3.2 偏微分関係

$f: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $s: B \rightarrow E$ を滑らかな切断とする。この時、 r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の切断 $j^r s: B \rightarrow J^r(f)$ が、 $j^r s(p) = j_p^r s$ によって定まる。このような $j^r s$ を s の延長と呼ぶ。

定義 0.3.7. 滑らかなファイバー束 $f: E \rightarrow B$ 上の r 階の偏微分関係 (*partial differential relation*) とは、 r -ジェット束 $J^r(f) \rightarrow B$ の部分束 $R \subset J^r(f)$ のことである。 r 階の偏微分関係 R が開 (*resp.* 閉) であるとは、 $R \subset J^r(f)$ が部分集合として開 (*resp.* 閉) であることをいう。

滑らかな切断 $s: B \rightarrow E$ が偏微分関係 R の解 (*solution*) であるとは、 $\text{Im}(j^r s) \subset R$ を満たすことである。 $R \rightarrow B$ の連続な切断のことを偏微分関係 R の形式的解 (*formal solution*) と呼ぶ。

$f: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束、 $R \subset J^r(f)$ を r 階の偏微分関係とする。

$$\begin{aligned} \text{Sol}(B; R) &= \{s: B \rightarrow E \mid s \text{ は } R \text{ の解の延長}\} \\ \Gamma(B; R) &= \{s: B \rightarrow E \mid s \text{ は } R \rightarrow B \text{ の連続な切断}\} \end{aligned}$$

とする。

定義 0.3.8. 偏微分関係 $R \subset J^r(f)$ がホモトピー原理 (*h-principle*) を満たすとは、任意の形式的解がホモトピーによって厳密解へと変形可能であることを言う。(*i.e.* $\pi_0(\text{Sol}(B; R)) \rightarrow \pi_0(\Gamma(B; R))$ が全射となること。) 偏微分関係 R がパラメトリック・ホモトピー原理 (*parametric h-principle*) を満たすとは、 $\text{Sol}(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値となることを言う。

0.3.3 Gromov のホモトピー原理

B を滑らかな多様体とする。各開集合 $U, V \subset B$ に対し、

$$\text{Diff}_B(U, V) = \{ \text{微分同相写像 } U \rightarrow V \}$$

と置くと、 Diff_B は群の構造を持つ。このような Diff_B は擬群の一種である。

$p: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とする。各開集合 $U, V \subset E$ に対し、

$$\text{Diff}_{E/B}(U, V) = \{ \text{微分同相写像 } \hat{\phi}: U \rightarrow V \mid p \circ \hat{\phi} = \phi \circ p \text{ (} \exists \phi: p(U) \rightarrow p(V) \text{)} \}$$

と置くと、 $\text{Diff}_{E/B}$ は亜群の構造を持つ。さらに、 $\hat{\phi} \mapsto \phi$ の対応によって、亜群の準同型 $\text{Diff}_{E/B} \rightarrow \text{Diff}_B$ が定まる。

定義 0.3.9. ファイバー束 $E \rightarrow B$ が自然であるとは、亜群の準同型 $\text{Diff}_{E/B} \rightarrow \text{Diff}_B$ が切断 $\text{Diff}_B \rightarrow \text{Diff}_{E/B}$ を持つことを言う。

自然なファイバー束 $E \rightarrow B$ 上の偏微分関係 R が Diff_B -不変 (Diff_B -invariant) であるとは、上記の切断 $\text{Diff}_B \rightarrow \text{Diff}_{E/B}$ の像が R を保つことである。

これで Gromov のホモトピー原理を述べる準備が整った。

定理 0.3.10 (Gromov のホモトピー原理 (Gromov [7]; cf. [4, 8])). $p: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とする。 R を p 上の開かつ Diff_B -不変な偏微分関係とする。 B が開多様体ならば、 R はパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

Gromov のホモトピー原理が Phillips のホモトピー原理を真に含むことは明らかである。一方、Hirsch-Smale のホモトピー原理は底空間が閉である場合も含むため、これでは不十分である。このギャップは微小拡張手品 (Microextension Trick) (cf. [4, §8.1]) によって埋めることができる。Gromov は層理論的ホモトピー原理を整備する中で、これを微小拡張定理 (Microextension Theorem) (cf. [8, p.85]) という形で定式化した。

0.3.4 層理論的ホモトピー原理

次章以降で説明する層理論的ホモトピー原理について概観する。

まず、ここまで写像空間の間の写像が“弱ホモトピー同値である”といったことを所与の概念として扱ってきたが、これをきちんと定義する必要がある。写像空間を空間として見るには、例えば Whitney 位相を入れるなどの方法があるが、これは細かすぎる。コンパクト開位相を入れてもよいのだが、ここではもっと代数的に扱いやすい構造として、擬位相空間と呼ばれる構造を入れる。層を扱う上で、フィルター余極限の振る舞いが重要になるのだが、位相空間の圏におけるフィルター余極限は十分に良い性質を持たない。これを解決するのが擬位相空間である。擬位相空間のアイデアは Spanier [28] らによるものを基礎にしている。Gromov [8] はこれを少し変形して用いているが、これもまた困難が残る。本書ではそのどちらとも違うものとして擬位相空間を定義している。擬位相空間の圏はモデル圏の構造を持ち、さらに位相空間の圏と Quillen 同値である。このモデル圏における弱同値として、弱ホモトピー同値を定義する。

擬位相空間の圏を \mathbf{qTop} と書くことにして、 \mathbf{qTop} に値を持つ位相空間 B 上の層を連続層と呼ぶ。連続層の圏を $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ と書く。任意の連続層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F} の形式的切断の層 \mathcal{F}^* と、対角射と呼ばれる標準的な射 $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が存在する。

定義 0.3.11. 連続層 \mathcal{F} が (層理論的) ホモトピー原理を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、 $\pi_0(\Delta): \pi_0(\mathcal{F}(U)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}^*(U))$ が全射になることである。連続層 \mathcal{F} が (層理論的) パラメトリック・ホモトピー原理を満たすとは、任意の開集合 $U \subset B$ に対し、 $\Delta_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値になることである。

Gromov の層理論的ホモトピー原理において最も重要な概念は可撓性 (flexibility) および微小可撓性 (microflexibility) である。可撓層とは、連続層の圏におけるある種の fibrant 対象であり、微小可撓層とは可撓層の一般化である。正確な定義は後の章に回すとして、これは次の性質により重要である。

定理 0.3.12. B を強局所可縮、局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間とする。 B 上の任意の可撓層は層理論的パラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

B としては例えば多様体や多面体を採用できる。(他の例としては CAT(0)-空間などもあるかもしれないが、私が詳しくないのであまり触れないことにする。距離空間とは相性が良さそうである。)

これは次の二つの補題により直ちにわかる。

補題 0.3.13 (cf. 補題 2.5.7 と補題 2.6.3). B を強局所可縮な正規ハウスドルフ空間とする。次が成り立つ。

- 任意の連続層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F} の形式的切断の層 \mathcal{F}^* は可撓である。
- 任意の連続層 \mathcal{F} に対し、対角射 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である。(i.e. 任意の点 $x \in B$ に対し、茎の間の射 $\Delta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*$ が弱ホモトピー同値である。)

補題 0.3.14 (cf. 系 2.3.13). B を局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間とする。 B 上の可撓層の間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、次は同値である。

1. f は *sectionwise* に弱ホモトピー同値である。
(i.e. 任意の開集合 $U \subset B$ に対し、射 $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ は弱同値である。)
2. f は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である。

Gromov のホモトピー原理を導くためには、微小可撓性に関する次の定理が必要である。

定理 0.3.15. B を多面体とし、 $A \subset B$ を余次元 1 以上の部分多面体とする。 B 上の任意の微小可撓層 \mathcal{F} に対し、 $\mathcal{F}|_A$ は A 上の可撓層である。

Gromov のホモトピー原理の証明のアウトラインを述べる。 R を開偏微分関係とすると、厳密解の層 $\text{Sol}(-; R)$ は微小可撓層である。 B が開多様体ならば、ある余次元 1 以上のスケルトン A に対し、 A にいくらかでも近い近傍と B は微分同相である。 R が Diff_B -不変な偏微分関係ならば、上記の微分同相は R を保つ。この性質により、 $\text{Sol}(B; R) \subset \Gamma(B; R)$ が弱ホモトピー同値になることを示すことができる。

0.4 亜群と Haefliger のホモトピー原理

余次元 q の任意の可積分分布は、局所的には q -次元多様体への沈め込みの核として表現できる。このアイデアにより、Phillips [20, 21] は沈め込みのホモトピー原理を葉層の研究へ応用することを考えていた。Phillips の得た結果は、可積分分布の存在に関する条件であったが、Haefliger [9] はこれをさらに進めて、可積分分布のホモトピー類の分類を与えた。Haefliger のアイデアは、任意の可積分分布は“普遍的な” q -次元多様体 Γ^q への沈め込みの核として表現できるというものである。ここで、“普遍的な” q -次元多様体として振る舞う対象 Γ^q とは、 \mathbb{R}^q 上の滑らかな局所微分同相からなる擬群 $\text{Diff}_{\mathbb{R}^q}$ に対応するエタール亜群 Γ^q のことである。

0.4.1 擬群と亜群

亜群とは全ての射が同型射である圏のことであった。擬群とは特別な亜群で、Cartan らによって空間上の構造を扱うために定義された。一方、位相亜群とは位相空間の圏における亜群対象のことであり、“空間の一般化”としてよく利用される。Haefliger は擬群を位相亜群として考え、さらに擬群から定まる構造を“一般化された写像”と見なした。Gromov のホモトピー原理は謂わば写像の偏微分関係に対するホモトピー原理であったが、“一般化された写像”の偏微分関係に対するホモトピー原理を与えようというのが Haefliger のアイデアである。

Haefliger 亜群

まずは擬群を定義する。 X を位相空間とする。各開集合 $U, V \subset X$ に対し、

$$\text{Homeo}_X(U, V) = \{ \text{同相写像 } U \rightarrow V \}$$

と置くと、 Homeo_X は亜群の構造を持つ。

定義 0.4.1. X 上の擬群とは、 Homeo_X の部分亜群 \mathcal{G} であって、次の貼り合わせ条件を満たすもののことを言う。

任意の $f \in \text{Homeo}_X(U, V)$ と U の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_\lambda$ に対し、

$$f \in \mathcal{G}(U, V) \Leftrightarrow f|_{U_\lambda} \in \mathcal{G}(U_\lambda, f(U_\lambda)) \quad (\forall \lambda)$$

例 0.4.2. Homeo_X は擬群である。

例 0.4.3. M を滑らかな多様体とする。各開集合 $U, V \subset M$ に対し、

$$\text{Diff}_M(U, V) = \{ \text{微分同相写像 } U \rightarrow V \}$$

と置くと、 Diff_M は擬群である。

\mathcal{G} を X 上の擬群とする。 $G_0 = X$ とし、 G_1 を各 $\sigma \in \mathcal{G}(U, V)$ の各芽 σ_x 全体の集合とする。 G_0 を対象空間、 G_1 を射空間として位相亜群 G が定まる。 さらに、 $G_1 \rightarrow G_0; \sigma_x \mapsto x$ は局所同相写像である。 このような位相亜群をエタール亜群という。

擬群 Homeo_X に対応するエタール亜群を Γ_X と書くことにする。 擬群 \mathcal{G} に対応するエタール亜群 G は Γ_X の部分亜群である。 逆に、 Γ_X の部分亜群 G で、 $G_0 = X$ を満たすエタール亜群が存在すれば、これはある擬群から生成される。 この対応は一对一である。 さらに、擬群が Diff_M の部分亜群である場合、対応するエタール亜群はエタール Lie 亜群である。

例 0.4.4. 擬群 $\text{Diff}_{\mathbb{R}^q}$ に対応するエタール亜群を Γ^q と書く。 これを Haefliger 亜群と呼ぶ。 Haefliger 亜群 Γ^q はエタール Lie 亜群である。

Haefliger 構造

X を位相空間、 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ を X の開被覆とする。 エタール亜群 $G(\mathcal{U})$ を次のように定義する。

- $G(\mathcal{U})_0 = \coprod U_\lambda$
- $G(\mathcal{U})_1 = \coprod U_\lambda \cap U_\mu$

ただし、各 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ は $U_\lambda \ni x \rightarrow x \in U_\mu$ なる射と見做す。 このようなエタール亜群 $G(\mathcal{U})$ を Čech 亜群と呼ぶ。

さらに G を位相亜群として、 G -構造について定義する。

定義 0.4.5. 開被覆 \mathcal{U} 上の G -構造とは、位相亜群の射 $G(\mathcal{U}) \rightarrow G$ のことである。 G -構造の同型とは、位相亜群の射の自然同型のことである。 \mathcal{U} 上の G -構造の同型類の集合を $H^1(\mathcal{U}; G)$ と書く。

位相空間 X 上の G -構造とは、開被覆上の G -構造の細分による順極限のことである。 X 上の G -構造の同型類の集合を $H^1(X; G)$ と書く。

X を位相空間とすると、 X は自明な位相亜群と見做せる。 さらに任意の開被覆 \mathcal{U} に対して自然な射 $G(\mathcal{U}) \rightarrow X$ が存在するが、これは弱同値である。 すなわち、 G -構造とは、位相亜群の圏を弱同値のクラスで局所化した圏の射の右分数表示である。 このような射を一般化された写像と呼ぶ。

0.4.2 Haefliger のホモトピー原理

Haefliger 亜群 Γ^q の分類空間を $B\Gamma^q$ と書き、接束 $T\Gamma^q$ の分類空間を $N\Gamma^q$ と書く。 $N\Gamma^q$ は $B\Gamma^q$ 上のベクトル束である。

M を滑らかな多様体とする。 M 上の可積分分布 \mathcal{D}_0 から \mathcal{D}_1 までの可積分ホモトピーとは、 $M \times [0, 1]$ 上の TM に接する分布 \mathcal{H} であって、 \mathcal{H} の各 $M \times \{t\}$ への制限 \mathcal{H}_t が可積

分であり、 $\mathcal{H}_i = \mathcal{D}_i (i = 0, 1)$ を満たすものを言う。Haefliger の定理は、Phillips のホモトピー原理で $N = \Gamma^q$ の場合を考えた場合の特殊な結果と見ることができる。厳密に述べれば以下のようなになる。

定理 0.4.6 (Haefliger のホモトピー原理 (Haefliger [9])). M を滑らかな開多様体とすると、以下の間に全単射が存在する。

1. M 上の可積分分布の可積分ホモトピー類。
2. 各ファイバー上で全射であるような連続なベクトル束の射 $TM \rightarrow N\Gamma^q$ のホモトピー類。

これはすなわち、“ $\pi_0(\text{Sub}(M, \Gamma^q)) \rightarrow \pi_0(\text{Sub}^f(M, \Gamma^q))$ が全単射” であることを意味している。

0.5 Stein 位相と岡-Grauert の原理

岡-Grauert の原理について再考する。

岡-Grauert の理論において最も重要な対象は Stein 多様体であるが、岡多様体も同じくらい重要である。ここでは定義を述べないが、次のような例を含む特殊な複素多様体として考えてほしい。

例 0.5.1. \mathbb{C}^n は Stein かつ岡多様体である。

例 0.5.2. 多重円盤は Stein 多様体である

例 0.5.3. Stein 多様体の閉複素部分多様体は Stein 多様体である。

例 0.5.4. 複素 Lie 群は岡多様体である。より一般に、複素 Lie 群の閉部分群による商空間は岡多様体である。

例 0.5.5. 複素ファイバー束 $E \rightarrow B$ の B および各ファイバーが岡多様体ならば、 E は岡多様体である。特に、岡多様体の有限積は岡多様体であり、岡多様体上の被覆空間は岡多様体である。

ひとまず X と Y を複素多様体とする。正則写像 $X \rightarrow Y$ 全体の集合を $\mathcal{O}(X, Y)$ と書き、連続写像 $X \rightarrow Y$ 全体の集合を $\mathcal{C}(X, Y)$ と書く。Stein 多様体と岡多様体は次の性質により重要である。

定理 0.5.6. X を Stein 多様体とし、 Y を岡多様体とする。 $\mathcal{O}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ は弱ホモトピー同値である。

ここで、 X を Stein 多様体とし、岡多様体 Y に値を持つ X 上の正則写像の層 $\mathcal{O}(-, Y)$ と、 Y に値を持つ X 上の連続写像の層 $\mathcal{C}(-, Y)$ について考える。上記の定理から、開集合 $U \subset X$ が Stein ならば $\mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{C}(U, Y)$ は弱ホモトピー同値である。一方、開集合 $U \subset X$ が Stein でない場合、このような保証はどこにもない。すなわち、 X が Stein かつ

Y が岡だったとしても、 X 上の層 $\mathcal{O}(-, Y)$ は層理論的パラメトリック・ホモトピー原理を満たさない。これをどうにか修正して、 X 上の層で層理論的パラメトリック・ホモトピー原理を満たす対象を作りたい。これには、 X が既に備えている位相を一旦忘れ、Stein 開集合からなる“位相”を定義する必要がある。

補題 0.5.7 (cf. [14, Lemma 4.1]). X を (*Stein* とは限らない) 複素多様体とする。 $U, V \subset X$ を *Stein* 開集合とすると、 $U \cap V$ も *Stein* である。

これにより、任意の複素多様体 X 上に、Stein 開集合を認容開集合として G -位相が定まる。これを Stein 位相と呼ぼう。 Y を岡多様体とすれば、Stein 位相上の層 $\mathcal{O}(-, Y)$ は層理論的パラメトリック・ホモトピー原理を満たすはずである。私はこの視点により岡-Grauert 理論の各証明を簡略化 (または整理) できる可能性について考えているが、まだ越えるべき困難は少なくないように思う。

ところで、任意の複素 Lie 群は対象空間が一点集合である複素 Lie 亜群と見なせる。複素 Lie 群 $GL_n(\mathbb{C})$ を複素 Lie 亜群と見做すと、複素多様体 X 上の正則複素ベクトル束は X 上の正則な $GL_n(\mathbb{C})$ -構造である。同様に、 X 上の C^0 -概複素ベクトル束は X 上の連続な $GL_n(\mathbb{C})$ -構造である。 X を Stein 多様体とすると、Grauert の原理は“ $\pi_0(\mathcal{O}(X, GL_n(\mathbb{C}))) \rightarrow \pi_0(\mathcal{C}(X, GL_n(\mathbb{C})))$ が全単射”であることを主張していると考えられる。 $(GL_n(\mathbb{C})$ は複素多様体ではなく複素 Lie 亜群と見做していることに注意。) これは Haefliger のホモトピー原理と同様の形式である。

第1章 一般化された空間とホモトピー

ホモトピー原理の主張を厳密に述べるため、写像空間の上でホモトピー論を展開したい。写像空間に位相を入れる方法は複数あるが、層理論的に扱うためにはフィルター余極限の性質が気になる。位相空間の圏におけるフィルター余極限は、層理論的によい振る舞いをしないのである。これを解決するのが擬位相空間である。擬位相空間のアイデアは Spanier [28] らによるものを基礎にしている。Spanier は、適切な景上の“具体層 (concrete sheaf)”として定義している。Gromov [8] はこれを少し変形して用いているが、やはり“具体層”として定義している。これらは扱いが難しい。本書ではまず特異単体圏 $\mathbf{Sing}\Delta$ を定義し、これが Grothendieck 位相を持つことを述べ、擬位相空間を景 $\mathbf{Sing}\Delta$ 上の層として定義する。(cf. 第 1.1 節) これはもはや集合の構造を持たないが、圏論的に議論することで通常ホモトピー論をほとんど行うことができる。(cf. 第 1.3 節) 実際、擬位相空間の圏はモデル構造を持つ。(cf. 第 1.2 節)

1.1 擬位相空間

特異単体圏 $\mathbf{Sing}\Delta$ を定義し、 $\mathbf{Sing}\Delta$ 上の前層として前擬位相空間を定義する。(cf. 第 1.1.1 節) さらに $\mathbf{Sing}\Delta$ は Grothendieck 位相を持つので、景 $\mathbf{Sing}\Delta$ 上の層として擬位相空間を定義できる。(cf. 第 1.1.2 節) 単体的集合と同様に、(前) 擬位相空間に対しても幾何学的実現が定義できる。(cf. 第 1.1.3 節) また、有限複体は擬位相空間の圏においても直感的な操作が正当化されることを見る。(cf. 第 1.1.4 節)

1.1.1 前擬位相空間

定義 1.1.1 (特異単体圏). 特異単体圏 \dagger とは、次のように定義される圏 $\mathbf{Sing}\Delta$ のこととする。

- $\mathbf{Sing}\Delta$ の対象は単体 Δ^n ($n = -1, 0, 1, \dots$) の閉部分集合である。(ただし、 $\Delta^{-1} = \emptyset$ とする。)
- $\mathbf{Sing}\Delta$ の射は連続写像である。

以下、単体的集合のアナロジーとして、単体圏の代わりに特異単体圏を用いた定義を考える。

定義 1.1.2 (前擬位相空間). 前擬位相空間 (*prequasitopological space*)[†] とは、**Set** に値を持つ **Sing** Δ 上の前層のことである。

前擬位相空間 X および単体の閉部分集合 $K \subset \Delta^n$ に対し、関手 $X : \mathbf{Sing}\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ による K の像を X_K と書く。前擬位相空間の間の射とは、前層の射のことである。前擬位相空間の圏を **pqTop** と書くことにする。

任意の位相空間に対し、標準的な前擬位相空間が対応する。

例 1.1.3. 各位相空間 X に対し、

$$\mathbf{Sing}^q(X)_K = \{ \text{連続写像 } K \rightarrow X \}$$

と置くことで前擬位相空間 $\mathbf{Sing}^q(X)$ が定まる。これを X の前擬位相空間[†] と呼ぶ。 $X \mapsto \mathbf{Sing}^q(X)$ は関手 $\mathbf{Sing}^q : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{pqTop}$ を定める。

特に $X = \Delta^n$ の時、 $\mathbf{Sing}^q(\Delta^n)$ は特異単体圏 **Sing** Δ の Hom 関手を用いて $\text{Hom}(-, \Delta^n)$ と書ける。誤解のない時、これを同じ記号 Δ^n で表す。

1.1.2 擬位相空間

特異単体圏 **Sing** Δ は有限閉被覆を被覆としてグロタンディーク位相を持つ。これにより、**Sing** Δ 上の層を定義することができる。

定義 1.1.4 (擬位相空間). 擬位相空間 (*quasitopological space*)[†] とは、**Set** に値を持つ **Sing** Δ 上の層のことである。

擬位相空間の間の射とは、層の射のことである。これをしばしば擬連続写像と呼ぶ。擬位相空間の圏を **qTop** と書くことにする。

例 1.1.5. 各位相空間 X に対し、前擬位相空間 $\mathbf{Sing}^q(X)$ は擬位相空間である。これを X の擬位相空間[†] と呼ぶ。

1.1.3 幾何学的実現

前擬位相空間の幾何学的実現も定義できる。 X は前擬位相空間とする。関手 $S_X : (\mathbf{Sing}\Delta)^{op} \times \mathbf{Sing}\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ を、 $S_X(K, L) = X_K \times L$ によって定める。

定義 1.1.6 (幾何学的実現). 前擬位相空間 X の幾何学的実現 (*geometric realization*) とは、 S_X のコエンド $\int^K S_X(K, K)$ のことである。これを $|X|$ と書く。

前擬位相空間 X の幾何学的実現は、具体的に次で与えられる。

命題 1.1.7.

$$|X| \cong \left(\coprod_K X_K \times K \right) / \sim$$

ただし、 \sim は次の二項関係 $\overset{p}{\sim}$ が生成する同値関係である。

$$(x, p) \overset{p}{\sim} (y, q) \Leftrightarrow \exists f : K \rightarrow L \text{ s.t. } Xf(x) = y, f(q) = p$$

$X \mapsto \text{Sing}^q(X)$ および $Y \mapsto |Y|$ の二つの対応によって、**Top** と **pqTop** の間には双方向の関手が定まる。これらは随伴 $|-| \dashv \text{Sing}^q$ を定める。

命題 1.1.8. 任意の位相空間 X に対し、自然な連続写像 $\epsilon_X : |\text{Sing}^q(X)| \rightarrow X$ が存在し、次の普遍性を満たす。

任意の前擬位相空間 Z および連続写像 $f : |Z| \rightarrow X$ に対し、次の図式を可換にする射 $\hat{f} : Z \rightarrow \text{Sing}^q(X)$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc} |\text{Sing}^q(X)| & \xrightarrow{\epsilon_X} & X \\ \uparrow \hat{f} & \nearrow f & \\ |Z| & & \end{array}$$

1.1.4 貼り合わせ補題

前擬位相空間の圏では射の貼り合わせの議論を行うことができない。よって、前擬位相空間の間の射は“区分的に連続”のような振る舞いをする。一方、擬位相空間の圏では、単体の有限閉被覆に対する貼り合わせの議論を行うことができる。これにより、有限複体程度の対象は、位相空間と同様の直感的な扱いが正当化される。例えば、単体の境界 $\partial\Delta^n$ は球面 S^{n-1} に付随する擬位相空間 $\text{Sing}^q(S^{n-1})$ と同型である。これは次の補題により保証される。

補題 1.1.9 (貼り合わせ補題). X を位相空間とし、 $\{X_i \subset X\}_i$ は X の有限閉被覆とする。このとき、圏 **qTop** 上の次の図式は余差核 (coequalizer) である。

$$\coprod_{i,j} \text{Sing}^q(X_i) \cap \text{Sing}^q(X_j) \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} \coprod_i \text{Sing}^q(X_i) \rightarrow \text{Sing}^q(X)$$

ただし、 l は $\text{Sing}^q(X_i) \cap \text{Sing}^q(X_j) \rightarrow \text{Sing}^q(X_i)$ の族が導く射であり、 r は $\text{Sing}^q(X_i) \cap \text{Sing}^q(X_j) \rightarrow \text{Sing}^q(X_j)$ の族が導く射である。

証明. $f \circ l = f \circ r$ を満たす任意の射 $f : \coprod_i \text{Sing}^q(X_i) \rightarrow Y$ をとる。次の図式の f' が存在することを示す。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i,j} \text{Sing}^q(X_i) \cap \text{Sing}^q(X_j) & \rightrightarrows & \coprod_i \text{Sing}^q(X_i) \longrightarrow \text{Sing}^q(X) \\ & & \searrow f \\ & & Y \end{array}$$

任意の閉集合 $S \subset \Delta^n$ および任意の $s \in \text{Sing}^q(X)[S] = \mathbf{Top}(S, X)$ をとる。 $S_i = s^{-1}(X_i)$ と置く。 s は連続写像 $S \rightarrow X$ だから、 $\{S_i\}_i$ は S の有限閉被覆である。さらに $s|_{S_i}$ は集合 $\text{Sing}^q(X_i)[S_i] = \mathbf{Top}(S_i, X_i)$ に属する。 $t_i = f(s|_{S_i})(\in Y[S_i])$ と置く。このとき、

$$\begin{aligned} t_i|_{S_i \cap S_j} &= f(s|_{S_i})|_{S_i \cap S_j} \\ &= f(s|_{S_i \cap S_j}) \\ &= f(s|_{S_j})|_{S_i \cap S_j} \\ &= t_j|_{S_i \cap S_j} \end{aligned}$$

を満たす。よって $(t_i)_i \in \prod Y[S_i]$ は $t|_{S_i} = t_i$ を満たすただ一つの $t \in Y[S]$ を導く。 $f'(s) = t$ として定めれば、上記の図式を可換にする射 $f' : X \rightarrow Y$ ができる。以上より f' の存在が示された。

逆にそのような f' が存在したとすると、 t の唯一性より、 f' は上記の定義に一致しなければならない。よって f' の一意性も示された。以上より余差核の普遍性が示された。 \square

例 1.1.10. 各圏上で、 $\partial\Delta^n$ は次の余差核図式で定義されている。

$$\coprod_{i,j} \Delta_{ij}^{n-2} \rightrightarrows \coprod_i \Delta_i^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n$$

ただし、各 Δ_i^{n-1} は単体 Δ^n の i 番目の $n-1$ 次元面であり、 Δ_{ij}^{n-2} は Δ_i^{n-1} と Δ_j^{n-1} の共通部分である。圏 \mathbf{Top} 上では明らかに $\partial\Delta^n \cong S^{n-1}$ である。補題 1.1.9 により、圏 \mathbf{qTop} 上でも $\partial\Delta^n \cong \text{Sing}^q(S^{n-1})$ が成り立つ。

例 1.1.11. 各圏上で、 Λ_k^n は次の余差核図式で定義されている。

$$\coprod_{i,j \neq k} \Delta_{ij}^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{i \neq k} \Delta_i^{n-1} \rightarrow \Lambda_k^n$$

圏 \mathbf{Top} 上では明らかに $\Lambda_k^n \cong \Delta^{n-1}$ である。補題 1.1.9 により、圏 \mathbf{qTop} 上でも $\Lambda_k^n \cong \Delta^{n-1}$ が成り立つ。

1.2 モデル構造

単体的集合の圏を \mathbf{sSet} と書き、位相空間の圏を \mathbf{Top} と書く。これまでと同様、前擬位相空間の圏を \mathbf{pqTop} と書き、擬位相空間の圏を \mathbf{qTop} と書く。次の随伴の列を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{G_0} & & \xleftarrow{G_1} & & \xleftarrow{G_2} & & \\ \mathbf{sSet} & \top & \mathbf{pqTop} & \top & \mathbf{qTop} & \top & \mathbf{Top} & \\ & \xrightarrow{F_0} & & \xrightarrow{F_1} & & \xrightarrow{F_2} & & \end{array}$$

ただし、

- G_0, G_1 は忘却関手。

- $G_2(X) = \text{Sing}^q(X)$ 。
- F_1 は層化関手。
- F_2 は幾何学的実現。
- F_0 は幾何学的実現と同様に、次で定義される。(ただし、 $(-)\bullet(-)$ は余幕である。)

$$F_0(X) = \int^n \mathbf{sSet}(\Delta^{n-1}, X) \bullet \Delta^{n-1}$$

とする。本節では \mathbf{pqTop} および \mathbf{qTop} 上にモデル構造を定義し、上記の随伴の列がすべて Quillen 同値になることを示したい。モデル構造としては、余束生成モデル構造の推移定理を用いて、 \mathbf{sSet} 上のモデル構造を推移させたものを採用する。 \mathbf{sSet} 上の余束 (resp. 非輪状余束) を生成する集合 $I_{\mathbf{sSet}}$ (resp. $J_{\mathbf{sSet}}$) は次のように定義されていたことを思い出そう。

- $I_{\mathbf{sSet}} = \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}$
- $J_{\mathbf{sSet}} = \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n\}$

また、 \mathbf{sSet} 上の弱同値のクラス $W_{\mathbf{sSet}}$ は次のように定義されていた。

- $W_{\mathbf{sSet}} = \{f \mid f \text{ の幾何学的実現は弱ホモトピー同値。}\}$

1.2.1 前擬位相空間のモデル構造

$I_{\mathbf{pqTop}} = F_0 I_{\mathbf{sSet}}$, $J_{\mathbf{pqTop}} = F_0 J_{\mathbf{sSet}}$, $W_{\mathbf{pqTop}} = G_0^{-1} W_{\mathbf{sSet}}$ と置く。これによって圏 \mathbf{pqTop} が余束生成モデル構造 (cf. 定義 ??) を持つことを証明する。

補題 1.2.1. $F_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{pqTop}$ は単射を保つ。

証明. 単体的集合の間の単射は余束である。 F_0 は押し出し、超限合成、レトラクトを保つので、 $F_0(\text{Cof}(I_{\mathbf{sSet}})) \subset \text{Cof}(I_{\mathbf{pqTop}})$ である。 $I_{\mathbf{pqTop}}$ に属する各射 $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ は \mathbf{pqTop} 上で単射である。objectwise に計算することで、 \mathbf{pqTop} 上の単射は押し出し、超限合成、レトラクトの操作で閉じていることがわかる。よって $\text{Cof}(I_{\mathbf{pqTop}})$ に属する各射は単射である。以上より F_0 は単射を保つ。□

補題 1.2.2. $F_0 \dashv G_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{pqTop}$ の余単位射を $\epsilon : F_0 G_0 \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{pqTop}}$ と置く。任意の前擬位相空間 X に対し、 $I_{\mathbf{pqTop}} \pitchfork \epsilon_X$ である。

証明. 次の図式の γ が存在することを示す。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & F_0(G_0(X)) \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \epsilon_X \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

定義より、

$$\begin{aligned} F_0(G_0(X)) &= \int^k \mathbf{sSet}(\Delta^{k-1}, G_0(X)) \bullet \Delta^{k-1} \\ &= \int^k G_0(X)[\Delta^{k-1}] \bullet \Delta^{k-1} \\ &= \int^k X[\Delta^{k-1}] \bullet \Delta^{k-1}. \end{aligned}$$

よって商射 $\coprod_k X[\Delta^k] \bullet \Delta^k \rightarrow F_0(G_0(X))$ が存在する。 γ を $\Delta^n \xrightarrow{\beta} X[\Delta^n] \bullet \Delta^n \rightarrow \coprod_k X[\Delta^k] \bullet \Delta^k \rightarrow F_0(G_0(X))$ なる合成として定義する。明らかに $\epsilon_X \circ \gamma = \beta$ である。任意の埋め込み $\sigma_i : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial \Delta^n & \xrightarrow{\sigma_i} & \partial \Delta^n \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Delta^n & \xrightarrow{\gamma} & F_0(G_0(X)) \end{array}$$

よって $\gamma|_{\partial \Delta^n} = \alpha$ である。 □

補題 1.2.3. $F_0 \dashv G_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{pqTop}$ の単位射を $\eta : \mathbf{Id}_{\mathbf{sSet}} \rightarrow G_0 F_0$ と置く。

(1) $\eta_{\Delta^n} : \Delta^n \rightarrow G_0(F_0(\Delta^n))$ は弱同値である。

(2) $\eta_{\Lambda_i^n} : \Lambda_i^n \rightarrow G_0(F_0(\Lambda_i^n))$ は弱同値である。

証明. (1) は $G_0(F_0(\Delta^n)) = \mathbf{Sing}(|\Delta^n|)$ より明らか。

(2) を n に関する帰納法で証明する。 $n = 0$ の場合、 $\eta_{\Lambda_i^0} : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$ は明らかに同型射であるので、特に弱同値である。

次に、 $k < n$ なる任意の k について、 n を k に置き換えた主張が成立すると仮定する。 $\Gamma^k \subset \Lambda_i^n$ を k -スケルトンとする。次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma^0 \hookrightarrow \Gamma^1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Gamma^k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Gamma^{n-1} = \Lambda_i^n & & & & & & \\ \parallel & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \eta_{\Lambda_i^n} \\ G_0(F_0(\Gamma^0)) \hookrightarrow G_0(F_0(\Gamma^1)) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow G_0(F_0(\Gamma^k)) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow G_0(F_0(\Gamma^{n-1})) = G_0(F_0(\Lambda_i^n)) & & & & & & \end{array}$$

$\Gamma^k \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ が弱同値であることを k に関する帰納法で証明する。

$k = 0$ の場合は $\Gamma^0 = \mathbf{1} = G_0(F_0(\Gamma^0))$ より明らか。

次に、 $l < k$ なる任意の l について、 $\Gamma^l \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^l))$ が弱同値であると仮定する。 $\Gamma^{k-1} \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^{k-1}))$ は弱同値である。 $\Gamma^{k-1} \rightarrow \Gamma^k$ は有限相対 $\{\Lambda_j^k \rightarrow \Delta^k | j\}$ -複体である。 i.e. 次の有限列が存在する。

$$\Gamma^{k-1} = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_N = \Gamma^k$$

ただし、各 $X_{s-1} \rightarrow X_s$ は $\Lambda_j^k \rightarrow \Delta^k$ の押し出しである。 F_0 と G_0 は任意の余極限を保つので、 $G_0(F_0(\Gamma^{k-1})) \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ は有限相対 $\{G_0(F_0(\Lambda_j^k)) \rightarrow G_0(F_0(\Delta^k)) | j\}$ -複体である。 よって、もしも $G_0(F_0(\Lambda_j^k)) \rightarrow G_0(F_0(\Delta^k))$ が非輪状余束であるならば、 $G_0(F_0(\Gamma^{k-1})) \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ は非輪状余束であり、特に弱同値であることがわかる。これを示そう。

帰納法の仮定から、 $\Lambda_j^k \rightarrow G_0(F_0(\Lambda_j^k))$ は弱同値である。次の図式により、 $G_0(F_0(\Lambda_j^k)) \rightarrow G_0(F_0(\Delta^k))$ は弱同値である。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^k & \xrightarrow{\cong} & \Delta^k \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ G_0(F_0(\Lambda_j^k)) & \longrightarrow & G_0(F_0(\Delta^k)) \end{array}$$

さらに、 F_0 と G_0 が任意の単射を保つことから、 $G_0(F_0(\Lambda_j^k)) \rightarrow G_0(F_0(\Delta^k))$ は余束でもあるため、特に非輪状余束である。

よって任意の相対 $\{G_0(F_0(\Lambda_j^k)) \rightarrow G_0(F_0(\Delta^k)) \mid j\}$ -複体は非輪状余束である。以上より $G_0(F_0(\Gamma^{k-1})) \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ は非輪状余束であるため、これは弱同値である。次の図式により、 $\Gamma^k \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ は弱同値である。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{k-1} & \xrightarrow{\cong} & \Gamma^k \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ G_0(F_0(\Gamma^{k-1})) & \xrightarrow{\cong} & G_0(F_0(\Gamma^k)) \end{array}$$

以上により k に関する帰納法が完了したため、任意の $k \leq n$ に対して $\Gamma^k \rightarrow G_0(F_0(\Gamma^k))$ は弱同値である。特に $k = n$ の場合を考えれば、 $\eta_{\Lambda_i^n} : \Lambda_i^n \rightarrow G_0(F_0(\Lambda_i^n))$ は弱同値である。以上により n に関する帰納法が完了したため、任意の n に対して $\eta_{\Lambda_i^n} : \Lambda_i^n \rightarrow G_0(F_0(\Lambda_i^n))$ が弱同値であることが示された。□

以上の準備の下で、圏 \mathbf{pqTop} が余束生成モデル圏の構造を持つことを証明しよう。

定理 1.2.4 (Y.). \mathbf{pqTop} 上の余束生成モデル圏の構造で、次を満たすものが存在する。

- $I_{\mathbf{pqTop}}$ が余束を生成する。
- $J_{\mathbf{pqTop}}$ が非輪状余束を生成する。
- $W_{\mathbf{pqTop}}$ は弱同値のクラスである。

さらに、 $F_0 \dashv G_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{pqTop}$ は *Quillen* 同値である。

証明. 定理 C.3.3 を応用するため、次を示せばよい。

- (1) $I_{\mathbf{pqTop}}$ と $J_{\mathbf{pqTop}}$ は小対象引数を許容する。
- (2) $\text{cell}(J_{\mathbf{pqTop}}) \subset W_{\mathbf{pqTop}}$ である。

順番に確かめていこう。

- (1) $I_{\mathbf{pqTop}}$ と $J_{\mathbf{pqTop}}$ は小対象引数を許容する。

例 C.1.20 より、各単体 Δ^n は圏 \mathbf{pqTop} の中で小さい。 $\partial\Delta^n$ と Λ_i^n は有限個の単体の余極限として表せる。系 C.1.23 より、これらは \mathbf{pqTop} の中で小さい。

(2) $\text{cell}(J_{\mathbf{pqTop}}) \subset W_{\mathbf{pqTop}}$ である。

\mathbf{sSet} 上、および \mathbf{pqTop} 上の余極限はすべて objectwise に余極限である。特に G_0 は余極限を保つ。また G_0 は極限を保つので、単射を保つ。 F_0 は明らかに余極限を保ち、補題 1.2.1 より単射も保つ。 $G_0(F_0(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n))$ は圏 \mathbf{sSet} の中で単射である。すなわち、これは \mathbf{sSet} の中で余束である。補題 1.2.3 より、これは弱同値である。よって、 $G_0(F_0(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n))$ は \mathbf{sSet} の中で非輪状余束である。特に、 $G_0(J_{\mathbf{pqTop}}) \subset \text{Cof}_{\mathbf{sSet}} \cap W_{\mathbf{sSet}}$ を満たす。 G_0 が余極限を保つことから、 $G_0(\text{cell}(J_{\mathbf{pqTop}})) = \text{cell}(G_0(J_{\mathbf{pqTop}})) \subset \text{Cof}_{\mathbf{sSet}} \cap W_{\mathbf{sSet}} \subset W_{\mathbf{sSet}}$ を得る。よって $\text{cell}(J_{\mathbf{pqTop}}) \subset G_0^{-1}(W_{\mathbf{sSet}}) = W_{\mathbf{pqTop}}$ である。

以上により \mathbf{pqTop} が余束生成モデル圏の構造を持つことが示された。

次に、Quillen 随伴 $F_0 \dashv G_0$ が Quillen 同値であることを示す。

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{pqTop} & \\ F_0 \dashv G_0 \nearrow & & \searrow F_2 F_1 \dashv G_1 G_2 \\ \mathbf{sSet} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Top} \\ & \dashv \dashv \text{Sing} & \end{array}$$

$\dashv \dashv \text{Sing}$ は Quillen 同値であるので、随伴 $F_0 \dashv G_0$ は“分裂単射”である。(厳密に言えば、ホモトピー圏の随伴 $\mathbb{L}F_0 \dashv \mathbb{R}G_0$ の単位射が同型射である。) 補題 1.2.2 は $F_0 \dashv G_0$ の余単位射が非輪状束であることを意味している。特に、余単位射は弱同値である。 \mathbf{sSet} の全ての対象は余束対象だから、命題 C.2.38 より、 $F_0 \dashv G_0$ の余単位射はそのまま $\mathbb{L}F_0 \dashv \mathbb{R}G_0$ の余単位射を導く。特に、 $\mathbb{L}F_0 \dashv \mathbb{R}G_0$ の余単位射は同型射である。以上より、 $\mathbb{L}F_0 \dashv \mathbb{R}G_0$ はホモトピー圏の同値を与える。すなわち $F_0 \dashv G_0$ は Quillen 同値である。 \square

1.2.2 擬位相空間のモデル構造

$I_{\mathbf{qTop}} = F_1 I_{\mathbf{pqTop}}$, $J_{\mathbf{qTop}} = F_1 J_{\mathbf{pqTop}0}$, $W_{\mathbf{qTop}} = G_1^{-1} W_{\mathbf{pqTop}}$ と置く。これによって圏 \mathbf{qTop} が余束生成モデル構造 (cf. 定義 ??) を持つことを証明する。

補題 1.2.5. 随伴 $F_1 \dashv G_1$ の単位射を η と置く。(i.e. つまり層化の標準的な射である。) 任意の前擬位相空間 X に対し、 $\eta_X : X \rightarrow G_1(F_1(X))$ は \mathbf{pqTop} の中で弱同値である。

証明. Quillen 随伴 $F_0 \dashv G_0$ と $\dashv \dashv \text{Sing}$ は Quillen 同値である。

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{pqTop} & \\ F_0 \dashv G_0 \nearrow & & \searrow F_2 F_1 \dashv G_1 G_2 \\ \mathbf{sSet} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Top} \\ & \dashv \dashv \text{Sing} & \end{array}$$

よって $F_2F_1 \dashv G_1G_2$ は Quillen 同値である。Top の全ての対象は束対象だから、 $F_2F_1 \dashv G_1G_2$ の単位射は弱同値である。また、随伴 $F_1 \dashv G_1$ の余単位射は同型だから、 $F_1(G_1(F_1(X))) \cong F_1(X)$ である。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G_1(F_1(X)) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ G_1(G_2(F_2(F_1(X)))) & \xrightarrow{\cong} & G_1(G_2(F_2(F_1(G_1(F_1(X))))) \end{array}$$

よって η_X は弱同値である。 □

補題 1.2.6. $F_1F_0 \dashv G_0G_1 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{qTop}$ の余単位射を $\epsilon : F_1F_0G_0G_1 \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{qTop}}$ と置く。任意の擬位相空間 X に対し、 $I_{\mathbf{qTop}} \pitchfork \epsilon_X$ である。

証明. 補題 1.2.2 と全く同様。 □

定理 1.2.7 (Y.). \mathbf{qTop} 上の余束生成モデル圏の構造で、次を満たすものが存在する。

- $I_{\mathbf{qTop}}$ が余束を生成する。
- $J_{\mathbf{qTop}}$ が非輪状余束を生成する。
- $W_{\mathbf{qTop}}$ は弱同値のクラスである。

さらに、

- 任意の擬位相空間 X は \mathbf{qTop} の中で束対象である。
- $F_1 \dashv G_1 : \mathbf{pqTop} \rightarrow \mathbf{qTop}$ は Quillen 同値である。

証明. 定理 C.3.3 を応用するため、次を示せばよい。

- (1) $I_{\mathbf{qTop}}$ と $J_{\mathbf{qTop}}$ は小対象引数を許容する。
- (2) $\text{cell}(J_{\mathbf{qTop}}) \subset W_{\mathbf{qTop}}$ である。

順番に確かめていこう。

- (1) $I_{\mathbf{qTop}}$ と $J_{\mathbf{qTop}}$ は小対象引数を許容する。

例 C.1.21 より、各単体 Δ^n は圏 \mathbf{qTop} の中で小さい。 $\partial\Delta^n$ と Λ_i^n は有限個の単体の余極限として表せる。系 C.1.23 より、これらは \mathbf{qTop} の中で小さい。

- (2) $\text{cell}(J_{\mathbf{qTop}}) \subset W_{\mathbf{qTop}}$ である。

貼り合わせ補題により、任意の $G_1(f) \in G_1(J_{\mathbf{qTop}})$ は $\Delta^{n-1} \xrightarrow{0} \Delta^{n-1} \times [0, 1]$ と同型である。これは \mathbf{pqTop} の中で非輪状余束 $F_0(\Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n)$ と同型である。よって $\text{cell}(G_1(J_{\mathbf{qTop}})) \subset W_{\mathbf{pqTop}}$ である。命題 ?? より、 $G_1(\text{cell}(J_{\mathbf{qTop}})) \subset G_1(F_1(\text{cell}(G_1(J_{\mathbf{qTop}})))) \subset W_{\mathbf{pqTop}}$ を得る。よって $\text{cell}(J_{\mathbf{qTop}}) \subset W_{\mathbf{qTop}}$ である。

以上により \mathbf{qTop} が余束生成モデル圏の構造を持つことが示された。

次に、任意の擬位相空間 X が \mathbf{qTop} の中で束対象であることを示す。貼り合わせ補題より、任意の $f \in J_{\mathbf{qTop}}$ は $\Delta^{n-1} \xrightarrow{0} \Delta^{n-1} \times [0, 1]$ と同型である。これはレトラクトである。よって $(\Delta^{n-1} \xrightarrow{0} \Delta^{n-1} \times [0, 1]) \pitchfork (X \rightarrow \mathbf{1})$ である。

最後に、Quillen 随伴 $F_1 \dashv G_1$ が Quillen 同値であることを示す。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{qTop} & \\
 F_1 F_0 \dashv G_0 G_1 \nearrow & & \searrow F_2 \dashv G_2 \\
 \mathbf{sSet} & \xrightarrow[\quad | \dashv \text{Sing} \quad]{\simeq} & \mathbf{Top}
 \end{array}$$

$| \dashv \text{Sing}$ は Quillen 同値であるので、随伴 $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ は“分裂単射”である。(厳密に言えば、ホモトピー圏の随伴 $\mathbb{L}(F_1 F_0) \dashv \mathbb{R}(G_0 G_1)$ の単位射が同型射である。) 補題 1.2.6 は $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ の余単位射が非輪状束であることを意味している。特に、余単位射は弱同値である。 \mathbf{sSet} の全ての対象は余束対象だから、命題 C.2.38 より、 $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ の余単位射はそのまま $\mathbb{L}F_0 \dashv \mathbb{R}G_0$ の余単位射を導く。特に、 $\mathbb{L}(F_1 F_0) \dashv \mathbb{R}(G_0 G_1)$ の余単位射は同型射である。以上より、 $\mathbb{L}(F_1 F_0) \dashv \mathbb{R}(G_0 G_1)$ はホモトピー圏の同値を与える。すなわち $F_1 F_0 \dashv G_0 G_1$ は Quillen 同値である。 $F_0 \dashv G_0$ は Quillen 同値であったので、 $F_1 \dashv G_1$ は Quillen 同値である。□

1.3 擬位相空間のホモトピー論

命題 1.3.1. \mathbf{qTop} はデカルト閉モデル圏

証明. 貼り合わせ補題より明らか。□

命題 1.3.2. X を擬位相空間とする。

- $X^{\Delta^1} \rightarrow X^{\partial\Delta^1} \cong X \times X$ は束。
- $X^{\Delta^1} \xrightarrow{i} X^{\Delta^0} \cong X (i = 0, 1)$ は非輪状束。

証明. X が束対象で \mathbf{qTop} がデカルト閉モデル圏であることより明らか。□

命題 1.3.3. \mathbf{qTop} 上の任意の非輪状余束は強変位レトラクトである。

証明. \mathbf{qTop} 上の任意の非輪状余束 $f: X \rightarrow Y$ をとる。 X が束対象であることから、 f はレトラクション $g: Y \rightarrow X$ を持つ。(下図を参照。)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow g & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

命題 1.3.2 により、 $f \circ g$ から id_Y へのホモトピー H が存在する。(下図を参照。)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y^{\Delta^1} \\ f \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{id_Y \times (f \circ g)} & Y \times Y \end{array}$$

すなわち f は強変位レトラクトである。 □

写像蹟

$f: X \rightarrow Y$ を擬位相空間の射とする。擬位相空間 X_f を、次の引き戻し図式によって定義する。

$$\begin{array}{ccc} X_f & \longrightarrow & Y^{[0,1]} \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

擬位相空間 X_f を f の写像蹟 (mapping track) と呼ぶ。 $e_f: X \rightarrow X_f$ と $f': X_f \rightarrow Y$ を次の図式で定義する。

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{e_f} & X_f & \longrightarrow & Y^{[0,1]} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow 0 \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_f & \longrightarrow & Y^{[0,1]} \\ & \searrow f' & \downarrow 1 \\ & & Y \end{array}$$

このとき、 $f = f' \circ e_f$ である。

定義 1.3.4. この分解を f の写像蹟と呼ぶ。

実は、この分解は f の“束置換”である。このことを示す前に、位相空間論から一つの補題を準備しておく。

補題 1.3.5. $\Sigma = ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ と置く。 $\Sigma \hookrightarrow [0, 1]^2$ は強変位レトラクション $R_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ で次を満たすものを持つ。

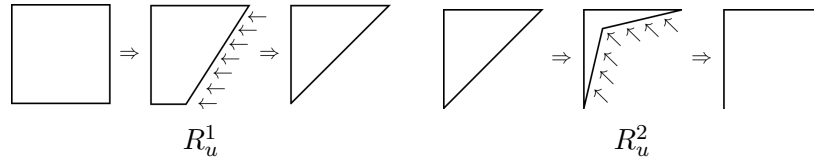
- $R_0 = id$ かつ $Im(R_1) \subset \Sigma$ である。
- $R_u|_{\Sigma} = id$ である。
- $R_u(s, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$ である。

証明. R_u^1 と R_u^2 を次のように定める。

$$R_u^1(s, t) = ((1 - (1 - t)u)s, t)$$

$$R_u^2(s, t) = (s, t) + \frac{(1-|s+t-1|)(1-|s-t|)}{2}u(-1, 1).$$

これらは次の図のような変形である。



R_u を次のように定めればよい。

$$R_u(s, t) = \begin{cases} R_{2u}^1(s, t) & (\text{if } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}) \\ R_{2u-1}^2(R_1^1(s, t)). & (\text{if } \frac{1}{2} \leq u \leq 1). \end{cases}$$

□

先ほどの分解 $f = f' \circ e_f$ が f の“束置換”であることを示そう。

命題 1.3.6.

- e_f は弱同値である。
- f' は束である。

証明. $X_f \rightarrow X$ は非輪状束 $Y^{[0,1]} \xrightarrow{0} Y$ の引き戻しである。よって $X_f \rightarrow X$ は非輪状束であり、特に弱同値である。よって e_f は弱同値である。

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X_f \\ \downarrow & & \downarrow f' \\ \Delta^{n-1} \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

γ_1 は次の合成とする。

$$\gamma_1 : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \xrightarrow{pr_1} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\alpha} X_f \rightarrow X$$

補題 1.3.5 の $\Sigma \hookrightarrow [0, 1]^2$ および強変位レトラクション $R_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ をとる。
 $\alpha' : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow Y$ は $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\alpha} X_f \rightarrow Y^{[0,1]}$ の随伴とする。 $\gamma'_2 : \Delta^{n-1} \times \Sigma \rightarrow Y$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \gamma'_2|_{\Delta^{n-1} \times ([0,1] \times \{1\})} &: \Delta^{n-1} \times ([0, 1] \times \{1\}) \cong \Delta^{n-1} \times [0, 1] \xrightarrow{\beta} Y \\ \gamma'_2|_{\Delta^{n-1} \times (\{0\} \times [0,1])} &: \Delta^{n-1} \times (\{0\} \times [0, 1]) \cong \Delta^{n-1} \times [0, 1] \xrightarrow{\alpha'} Y \end{aligned}$$

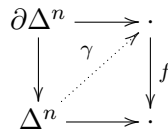
$\gamma_2 : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow Y^{[0,1]}$ は $\gamma'_2 \circ R_1$ の随伴とする。これらの積として射 $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 : \Delta^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow X_f$ を得る。この γ は上図 (α, β) のリフトである。よって $J_{\mathbf{qTop}} \pitchfork f'$ である。これは f' が束であることを意味する。 \square

HELP 補題

擬位相空間の弱同値の特徴づけを与える。

命題 1.3.7 (HELP 補題 (cf. [30])). 擬位相空間の射 $f : X \rightarrow Y$ に対し、次は同値である。

- (1) f は弱同値である。
- (2) f は $I_{\mathbf{qTop}}$ に対して右ホモトピー拡張リフト性質 (*right Homotopy Extension Lifting Property*) を満たす。i.e. 下図のような可換な四角図式が存在した時、下図の γ が存在して上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を固定するホモトピーによる同値を除いて可換にする。



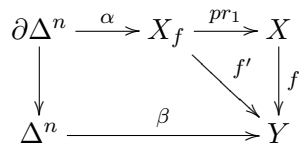
証明.

(1) \Rightarrow (2)

f の分解 $f = p_f \circ i_f$ で、 p_f が束で i_f が非輪状余束であるものをとる。 f が弱同値ならば、 p_f は非輪状束である。任意の $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ は p_f に対して左リフト性質を持つ。 i_f 命題 1.3.3 より強変位レトラクションを持つ。よって (2) が成り立つ。

(2) \Rightarrow (1)

f が弱同値であることを示すためには、写像 $f' : X_f \rightarrow Y$ が非輪状束であることを示せばよい。次の図式を考える。



(2) より、 $\gamma' : \Delta^n \rightarrow X$ とホモトピー $H : \Delta^n \rightarrow Y^{[0,1]}$ が存在して、ホモトピーは $\partial\Delta^n$ を固定し、次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} & \Delta^n & \\ f \circ \gamma' \swarrow & \downarrow H & \searrow \beta \\ Y & Y^{[0,1]} & Y \\ \longleftarrow 0 & & \longrightarrow 1 \end{array}$$

$\gamma = \gamma' \times H : \Delta^n \rightarrow X_f$ と置く。 γ は図式 (α, β) のリフトである。よって $I_{\mathbf{qTop}} \pitchfork f'$ である。これは f' が非輪状束であることを意味する。よって f は弱同値である。□

HELP 補題には例えば次のような応用がある。

命題 1.3.8. $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ は擬位相空間の射のフィルター図式とする。もしも任意の f_λ が弱同値ならば、 $\lim_{\rightarrow \lambda} f_\lambda$ も弱同値である。

証明. $f : X \rightarrow Y$ を次のように置く。

$$f = \lim_{\rightarrow \lambda} f_\lambda, \quad X = \lim_{\rightarrow \lambda} X_\lambda, \quad Y = \lim_{\rightarrow \lambda} Y_\lambda$$

HELP 補題 (命題 ??) より、示すべきことは次の四角図式に対し、下図の γ が存在して上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を固定するホモトピーによる同値を除いて可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

米田の補題により、十分大きい λ に対し次の四角図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X_\lambda \\ \downarrow & \nearrow \gamma' & \downarrow f_\lambda \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y_\lambda \end{array}$$

f_λ が弱同値であることから、この図式に対し、 γ' が存在して上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を固定するホモトピーによる同値を除いて可換にする。 γ を $\Delta^n \xrightarrow{\gamma'} X_\lambda \rightarrow X$ なる合成として定めると、これは条件を満たす。□

第2章 連続層と可撓層

2.1 連続層

\mathbf{qTop} に値を持つ層を連続層と呼ぶ。位相空間 B 上の連続層の圏を $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ と書く。 $\mathbf{qTop} = \mathbf{Sh}(\mathbf{Sing}\Delta; \mathbf{Set})$ より、

$$\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \cong \mathbf{Sh}(B_{top} \times \mathbf{Sing}\Delta; \mathbf{Set}) \cong \mathbf{Sh}(\mathbf{Sing}\Delta; \mathbf{Sh}(B; \mathbf{Set}))$$

が成り立つ。 B 上の連続層 \mathcal{F} および閉集合 $K \subset \Delta^n$ に対し、集合に値を持つ B 上の層 $\mathcal{F}[K]$ を

$$\mathcal{F}[K](U) = \mathcal{F}(U)(K)$$

によって定める。連続層 \mathcal{F} の茎 \mathcal{F}_x は擬位相空間であり、すなわち $\mathbf{Sing}\Delta$ 上の層である。 \mathbf{qTop} 上のフィルター余極限は objectwise にフィルター余極限であるので、各閉集合 $K \subset \Delta^n$ に対し集合 $\mathcal{F}_x(K)$ は茎 $\mathcal{F}[K]_x$ に一致する。

命題 2.1.1. 任意の位相空間 B は \mathbf{qTop} に対して十分多くの点を持つ。

証明. $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は位相空間 B 上の連続層の間の射とする。

$$\begin{aligned} f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \text{ が任意の } x \text{ に対して同型} &\Leftrightarrow (f_x)_K: \mathcal{F}_x(K) \rightarrow \mathcal{G}_x(K) \text{ が任意の } x, K \text{ に対して同型} \\ &\Leftrightarrow (f_K)_x: \mathcal{F}[K]_x \rightarrow \mathcal{G}[K]_x \text{ が任意の } x, K \text{ に対して同型} \\ &\Leftrightarrow f_K: \mathcal{F}[K] \rightarrow \mathcal{G}[K] \text{ が任意の } K \text{ に対して同型} \\ &\Leftrightarrow f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \text{ が同型} \end{aligned}$$

よって、位相空間 B は \mathbf{qTop} に対して十分多くの点を持つ。 □

\mathcal{F} を B 上の連続層とし、 $A \subset B$ を任意の部分集合とする。 \mathcal{F} の $A \hookrightarrow B$ による引き戻しを $\mathcal{F}|_A$ と書いたとき、 $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}|_A(A)$ によって定める。 B が正則空間で、 A が閉集合であれば、単に $\mathcal{F}(A) \cong \varinjlim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$ である。

2.2 可撓層と可撓拡張

連続層の可撓性について定義する。

定義 2.2.1. B 上の連続層 \mathcal{F} が可撓 (*flexible*) であるとは、任意のコンパクト対 $K \subset L (\subset B)$ について、制限射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が *Serre* 束になることである。

ここではさらに、連続層の射の可撓性についても定義する。

定義 2.2.2. B 上の連続層の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が可撓 (*flexible*) または可撓拡張 (*flexible extension*) であるとは、任意のコンパクト対 $K \subset L (\subset B)$ について、射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ が Serre 束になることである。

注意 2.2.3. 連続層 \mathcal{F} が可撓であることは、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{1}$ が可撓拡張であることと同値である。

上記の射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ は今後何度も扱う。そこで、記号を用意しておく。

定義 2.2.4. B 上の連続層の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ および任意のコンパクト対 $K \subset L (\subset B)$ に対し、射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L)$ を $f_{K \subset L}$ と書くことにする。

これは $f_K : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ の一般化になっている。

命題 2.2.5. B 上の連続層の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ および任意のコンパクト部分集合 $K (\subset B)$ に対し、 f_K と $f_{\emptyset \subset K}$ は同型である。

証明. $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{G}(\emptyset) = \mathbf{1}$ より明らか。 □

2.3 弱可撓層

本節では可撓層の一般化である、弱可撓層を定義する。弱可撓層は Studer [29] によって岡-Grauert の原理を層理論的に取り扱うために導入された。

まず、コンパクト集合の組の弱可撓性を定義する。

定義 2.3.1. B を位相空間とし、 \mathcal{F} を B 上の連続層とする。 B のコンパクト部分集合 $K, L \subset B$ の組 (K, L) が \mathcal{F} に関する順序付き弱可撓 (*ordered weakly flexible*) 対であるとは、次の二つを満たすことを言う。

1. 次の引き戻し図式がホモトピー引き戻し図式となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(K \cup L) & \longrightarrow & \mathcal{F}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K \cap L) \end{array}$$

2. $\mathcal{F}(K \cup L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束になる。

注意 2.3.2. B がハウスドルフ空間の時、上の条件 1. は、次の射が弱同値となることと同値である。

$$\mathcal{F}(K \cup L) \cong \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(K \cap L)^{[0,1]} \times_{\mathcal{F}(K \cap L)} \mathcal{F}(L)$$

また、条件 2. は次の写像 Φ が任意の n で全射になることと同値である。

$$\Phi : \text{Hom}(\Delta^n, \mathcal{F}(K \cup L)) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_i^n, \mathcal{F}(K \cup L)) \times_{\text{Hom}(\Lambda_i^n, \mathcal{F}(K))} \text{Hom}(\Delta^n, \mathcal{F}(K))$$

(K, L) が \mathcal{F} に関する弱可撓 (weakly flexible) 対であるとは、 \mathcal{F} が圏 **Top** に値を持ち、連続層として条件 1 を満たし、上記の写像 Φ の像がコンパクト開位相について稠密になることを言う。Studer [29] は弱可撓対として “ \mathcal{C} -対” を採用することで、層理論的ホモトピー原理を岡・Grauert 理論へと応用しようとした。

注意 2.3.3. 順序付き弱可撓対の Studer [29] によるオリジナルの定義は、上記よりも強い定義となっている。上記の定義から Studer の定理をそのまま証明できるかどうかはわからないが、Stein 多様体論への応用を考えた場合、これで十分である。

次に、コンパクト集合の n -組に関する弱可撓性を定義する。

定義 2.3.4. B のコンパクト部分集合 $K_1, \dots, K_n \subset B$ の組 (K_1, \dots, K_n) が (連続層 \mathcal{F} に関する) 弱可撓繋ぎ (weakly flexible string) (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ (ordered weakly flexible string)) であることを、 n に関して帰納的に、次のように定義する。

1. (K_1) は弱可撓繋ぎ (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ) である。
2. (K_1, K_2) が弱可撓繋ぎ (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ) であるとは、 (K_1, K_2) が弱可撓対 (resp. 順序付き弱可撓対) であることを言う。
3. (K_1, \dots, K_n) ($n \geq 3$) が弱可撓繋ぎ (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ) であるとは、 $(K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}, K_n)$ が弱可撓対 (resp. 順序付き弱可撓対) であり、 (K_1, \dots, K_{n-1}) と $(K_1 \cap K_n, \dots, K_{n-1} \cap K_n)$ が弱可撓繋ぎ (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ) であることを言う。

これで準備が整ったので、(順序付き) 弱可撓層を定義する。

定義 2.3.5 (Studer [29]). B を位相空間とし、 \mathcal{F} を B 上の連続層とする。 \mathcal{F} が弱可撓 (weakly flexible) (resp. 順序付き弱可撓 (ordered weakly flexible)) であるとは、 B の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 \mathcal{U} を細分する局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが存在することを言う。

- 任意の n に対し (K_1, \dots, K_n) が \mathcal{F} に関する弱可撓繋ぎ (resp. 順序付き弱可撓繋ぎ) である。
- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は B の開被覆である。

(ただし、 Int は内部作用素である。)

注意 2.3.6. Studer [29] によるオリジナルの定義は、 $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ が B を被覆することを要求していない。しかし、 \mathcal{C} -対が弱可撓対として現れる場合は、これは自動的に満たされる。

上記の定義は Studer によるオリジナルの定義である。ここでは、さらに強い次の定義を用いる。

定義 2.3.7. \mathcal{F} が全局所弱可撓 (*resp.* 全局所順序付き弱可撓) であるとは、 B の任意の開集合 U に対し $\mathcal{F}|_U$ が弱可撓 (*resp.* 順序付き弱可撓) であることを言う。

例 2.3.8. \mathcal{F} がハウスドルフ空間 B 上の可撓層ならば、任意のコンパクト部分集合の組 (K, L) は順序付き弱可撓対である。よってさらに、任意のコンパクト部分集合の n -組 (K_1, \dots, K_n) は順序付き弱可撓繋ぎである。

B がさらに局所コンパクトかつパラコンパクトならば、任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 \mathcal{U} を細分する局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものが存在する。

- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は B の開被覆である。

特にこの時、 B 上の可撓層は順序付き弱可撓層である。 B がさらに遺伝的パラコンパクト (i.e. 任意の開集合がパラコンパクト) ならば、 B 上の可撓層は全局所順序付き弱可撓層である。例えば、第二可算公理を満たす局所コンパクト・ハウスドルフ空間や、局所コンパクト距離空間は上記すべての条件を満たす。

例 2.3.9. B を複素多様体とする。Stein 開集合を認容開集合とし、正則領域による被覆と $id: U \rightarrow U$ を被覆とすることで B 上の G -位相が定まる。岡写像 $E \rightarrow B$ の切断の層は、上記の G -位相について全局所弱可撓である。(cf. [29])

注意 2.3.10. Studer [29] は弱可撓層が完備距離化可能空間に値を持つ場合に岡-Grauert の原理へ応用があることを示した。一方、Studer は順序付き弱可撓層の応用について、

“Ordered flexibility is—in the context of Oka theory—most of times rather easy to show. Proofs shall be given elsewhere.”

と書いているが、Studer がどのような応用を考えているのか現時点ではよくわからない。(個人的な予想だが、正則切断ではなく滑らかな切断の層への応用を考えているような気がする。) しかし、岡写像 $E \rightarrow B$ の切断の層 \mathcal{F} はおそらく順序付き弱可撓層にはならないと思われる。 $\mathcal{F}(K \cup L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が Serre 束ならば、特に各弧状連結成分上で全射または空写像でなければならないが、これは期待できない。実際、 \mathbb{C}^n の Stein 開集合は任意の境界点に対してその周りに拡張できない正則関数を持つことが知られている。(このような性質を持つ連結開集合を正則領域 (domain of holomorphy) と呼ぶ。正則領域は擬凸領域と同値であり、Stein 多様体とは擬凸領域の一般化として定義されている。)

全局所弱可撓層を導入する理由は、次の性質にある。

\mathcal{F} を B 上の連続層とする。 \mathcal{F} は前層なので、関手 $B_{top}^{op} \rightarrow \mathbf{qTop}$ である。モデル圏 \mathbf{qTop} のホモトピー圏を $\mathbf{Ho}(\mathbf{qTop})$ と書くと、関手の合成 $B_{top}^{op} \rightarrow \mathbf{qTop} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{qTop})$ は $\mathbf{Ho}(\mathbf{qTop})$ に値を持つ B 上の前層を定める。この前層を $\hat{\mathcal{F}}$ と書く。

命題 2.3.11. \mathcal{F} が全局所順序付き弱可撓ならば、前層 $\hat{\mathcal{F}}$ は層である。

証明. B の任意の開集合 U の局所有限な可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で次を満たすものをとる。

- 任意の n に対し (K_1, \dots, K_n) が \mathcal{F} に関する順序付き弱可撓繋ぎである。
- $\{\text{Int}(K_n)\}_n$ は U の開被覆である。

$L_n = K_0 \cup \dots \cup K_n$ とする。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}(L_0) = \mathcal{F}(K_0) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 \prod_i^{\infty} \mathcal{F}(K_i) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \prod_i^{n+1} \mathcal{F}(K_i) & \longrightarrow & \prod_i^n \mathcal{F}(K_i) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}(K_0) \\
 \Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
 \prod_{i,j=0}^{\infty} \mathcal{F}(K_i \cap K_j) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \prod_{i,j=0}^{n+1} \mathcal{F}(K_i \cap K_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{F}(K_0)
 \end{array}$$

各列は差核であり、各行は塔とその極限である。まず、下二列は積の射影の列なので、**qTop** が正則モデル圏であることから、これは fibration の塔である。各 n に対し (K_1, \dots, K_n) が \mathcal{F} に関する順序付き弱可撓繋ぎであることから、上行も fibration の塔である。よって、各塔の極限は塔のホモトピー極限でもある。また、 (K_1, \dots, K_n) が \mathcal{F} に関する順序付き弱可撓繋ぎであることから、一番左以外の各列はホモトピー差核でもある。よって、一番左列もホモトピー差核である。これは実際、次のような計算からわかる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(U) &\cong \lim_{\leftarrow n} \mathcal{F}(L_n) \\
 &\cong \text{holim}_{\leftarrow n} \mathcal{F}(L_n) \\
 &\cong \text{holim}_{\leftarrow n} \text{holim}_{\leftarrow} \left[\prod_i^n \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \right] \\
 &\cong \text{holim}_{\leftarrow} \text{holim}_{\leftarrow n} \left[\prod_i^n \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^n \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \right] \\
 &\cong \text{holim}_{\leftarrow} \left[\prod_i^{\infty} \mathcal{F}(K_i) \rightrightarrows \prod_{i,j=0}^{\infty} \mathcal{F}(K_i \cap K_j) \right]
 \end{aligned}$$

このような可算コンパクト被覆 $\{K_n\}_n$ は開被覆と共終なので、 $\mathcal{F}(U)$ は $\widehat{\mathcal{F}}^+(U)$ に弱同値である。すなわち、 $\widehat{\mathcal{F}}$ は $\widehat{\mathcal{F}}^+$ と同型である。これは $\widehat{\mathcal{F}}$ が層であることを意味する。 \square

擬位相空間の圏 **qTop**、単体的集合の圏 **sSet**、 ∞ -亜群の圏 $\infty\text{-Grpd}$ は全て Quillen 同値である。すなわち、ホモトピー圏 **Ho(qTop)**、**Ho(sSet)**、**Ho($\infty\text{-Grpd}$)** は全て圏同値である。よって、**Ho(qTop)** に値を持つ B 上の層は B 上の ∞ -園と見なすことができる。これは十分な点を持つ。すなわち、次が成り立つ。

命題 2.3.12. $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は、 $\mathbf{Ho}(\mathbf{qTop})$ に値を持つ B 上の層の間の射とする。次は同値である。

1. f は同型である。
2. 任意の点 $x \in B$ に対し、茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ は同型である。

直ちに次を得る。

系 2.3.13. $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は、 B 上の全局所弱可撓層の間の射とする。次は同値である。

1. f は *sectionwise* に弱ホモトピー同値である。
(*i.e.* 任意の開集合 $U \subset B$ に対し、射 $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ は弱同値である。)
2. f は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である。
(*i.e.* 任意の点 $x \in B$ に対し、茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ は弱同値である。)

特に、 B が局所コンパクトかつ遺伝的パラコンパクトなハウスドルフ空間ならば、可撓層の間の射に対して上記の同値が成り立つ。

2.4 モデル構造

本節では、連続層の間の射が *stalkwise* に弱ホモトピー同値ならば弱同値とし、可撓拡張ならば束とするようなモデル構造の存在を議論したい。しかし、連続層の圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上では弱同値と束は定義できるものの、余束の存在が期待できない。そこで、まずは必要な余束を追加することによって舞台となる圏を拡張する必要がある。(cf. 第 2.4.1 節) 次に拡張された圏の上で、二種類のモデル構造を定義する。(cf. 第 2.4.2 節、第 2.4.3 節) 最後に、得られた二種類のモデル構造を混合することで、希望のモデル構造を得る。(cf. 第 2.4.4 節)

2.4.1 舞台となる圏の拡張

可撓拡張を束とするようなモデル構造を構成するため、可撓拡張を右リフト性質で特徴づけたい。しかし、可撓拡張を右リフト性質で特徴づけられる射のクラスは圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ の内部でとることはできない。しかし、圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ の変種を考えることにより、このような射のクラスを含んだ新たな圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ を考えることができる。

アイデア

部分集合 $K \subset B$ に対し、包含写像 $i : K \subset B$ は随伴 $i^* \dashv i_* : \mathbf{Sh}(K; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ を定める。ここでは仮に、任意のコンパクト部分集合 K に対し、引き戻し関手 $i^* : \mathbf{Sh}(K; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ が左随伴 $i_! : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{Sh}(K; \mathbf{qTop})$

を持っていたと仮定してみよう。¹ 一点集合へのただ一つの写像 $\mu : K \rightarrow \mathbf{1}$ は、随伴 $\mu^* \dashv \mu_* : \mathbf{qTop} \rightarrow \mathbf{Sh}(K; \mathbf{qTop})$ を定める。 $\mu^* \dashv \mu_*$ と $i_! \dashv i^*$ を合成することにより、随伴 $i_! \mu^* \dashv \mu_* i^* : \mathbf{qTop} \rightarrow \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ を得る。各連続層 \mathcal{F} に対し、 $\mu_* i^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(K)$ である。各擬位相空間 X に対し、 $i_! \mu^*(X) = X_{/K}$ と表すことにしよう。このとき、連続層の間の射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ と任意のコンパクト対 $K \subset L (\subset B)$ について、次の二つの主張は同値である。

- 次の四角図式はリフトを持つ。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & \mathcal{F}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) \end{array}$$

- 次の四角図式はリフトを持つ。

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda_i^n)_{/L} \cup (\Lambda_i^n)_{/K} \Delta^n_{/K} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n_{/L} & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

こうして可撓拡張を右リフト性質で特徴づけることができた。

景の拡張

以上はあまり意味のある議論ではない。なぜなら、左随伴 $i_!$ の存在という仮定が強すぎるからである。ここで、任意の開埋め込み $i : U \subset B$ に対しては零延長と呼ばれる $i_!$ が存在することを思い出し、 B の開集合系にコンパクト集合系を新たに加えることで、層の定義域を拡張してみる。任意の位相空間 B に対し、

$$B_{cpt} = \{U \cap K \mid U \subset X \text{ は開集合, } K \subset X \text{ はコンパクト}\}$$

とする。 B_{cpt} は包含関係を射として圏の構造を持つので、 B_{cpt} 上の前層が定義できる。コンパクト部分集合 $K \subset B$ および擬位相空間 X に対し、 B_{cpt} 上の前層 $X_{/K}$ を次のように定義する。

$$X_{/K}(A) = \begin{cases} X & (A \subset K) \\ \emptyset & (A \not\subset K) \end{cases}$$

関手 $\mathbf{qTop} \rightarrow \mathbf{PSh}(B_{cpt}; \mathbf{qTop}); X \mapsto X_{/K}$ は関手 $\mathbf{PSh}(B_{cpt}; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{qTop}; \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(K)$ の左随伴である。よって、圏 $\mathbf{PSh}(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ 上では可撓拡張は右リフト性質によって特徴づけることができる。

¹例えば B が離散集合であれば条件を満たすが、残念ながら多くの場合このような状況は期待できない。このような連続写像をトポス理論では本質的 (essential) と言い、これは局所同相写像の一般化である。実際、 K が開集合であれば零延長と呼ばれる $i_!$ の構成が存在する。

添加前層

議論の本質は以上だが、モデル構造の存在を示すためには少し技術的な困難が残る。そこで、次の定義を導入する。

定義 2.4.1. \mathbf{qTop} に値を持つ B_{cpt} (resp. B) 上の前層 \mathcal{F} が添加前層であるとは、 $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathbf{1}$ を満たすことである。 \mathbf{qTop} に値を持つ B_{cpt} (resp. B) 上の添加前層の圏を $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ (resp. $\mathbf{PSh}_*(B; \mathbf{qTop})$) と書く。

Grothendieck による最初の定義では、前層の定義域は空でない開集合全体の集合であった。その意味での前層 \mathcal{F} が存在した時、 $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathbf{1}$ と定めることによって現代の意味での前層が得られる。これは上記の添加前層である。任意の層は添加前層であるため、実用上は前層と添加前層の区別は必要ないと言えるだろう。ここで、添加単体的集合について同様の議論を行うことを思い出し、これに倣って添加前層という呼称を採用する。

関手 $\iota : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ を、

$$\iota(\mathcal{F})(A) = \lim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$$

によって定義する。

命題 2.4.2. 上記の関手 ι は充満忠実かつ左完全である。

証明. $\iota_1 : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B; \mathbf{qTop})$ を包含関手とし、 $\iota_2 : \mathbf{PSh}_*(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ を

$$\iota_2(\mathcal{F})(A) = \lim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$$

によって定義する。 $\iota = \iota_2 \circ \iota_1$ である。 ι_1 は充満忠実かつ左完全であるので、 ι_2 が充満忠実かつ左完全であることを示せばよい。 $\nu : \mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop}) \rightarrow \mathbf{PSh}_*(B; \mathbf{qTop})$ を

$$\nu(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U)$$

によって定義する。この時、随伴 $\iota_2 \dashv \nu$ が存在し、さらに $\iota_2 \dashv \nu$ の単位射は同型である。よって ι_2 は充満忠実である。また、有限極限とフィルター余極限は交換するから、 ι_2 は左完全である。以上より $\iota (= \iota_2 \circ \iota_1)$ は充満忠実かつ左完全である。□

2.4.2 コンパクト可撓モデル構造

圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ 上に一つ目のモデル構造を定義する。余束生成モデル構造を定義するため、二つの射の集合 I_{cpt} と J_{cpt} および射のクラス W_{cpt} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} I_{cpt} &= \{(\partial\Delta^n)_{/L} \cup_{(\partial\Delta^n)_{/K}} \Delta^n_{/K} \rightarrow \Delta^n_{/L} \mid K, L, n\} \\ J_{cpt} &= \{(\Lambda_i^n)_{/L} \cup_{(\Lambda_i^n)_{/K}} \Delta^n_{/K} \rightarrow \Delta^n_{/L} \mid K, L, n, i\} \\ W_{cpt} &= \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \mid f_K : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K) \text{ は弱同値 } (\forall K : \text{コンパクト})\} \end{aligned}$$

ただし、 I_{cpt} の条件に現れる K, L はコンパクト部分集合の組で $K \subset L(\subset B)$ の範囲を動き、 n は自然数で $n \geq 0$ の範囲を動く。また、 J_{cpt} の条件に現れる K, L はコンパクト部分集合の組で $K \subset L(\subset B)$ の範囲を動き、 n, i は自然数の組で $n > 0, 0 \leq i \leq n$ の範囲を動く。

定理 2.4.3. I_{cpt} が余束を、 J_{cpt} が非輪状余束を生成し、 W_{cpt} が弱同値のクラスに一致するような余束生成モデル構造が、圏 $\mathbf{PSh}_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ 上に存在する。

証明. 命題 C.3.2 を応用するため、次を確かめればよい。

(1) $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset W_{cpt} \cap \text{Cof}(I_{cpt})$ である。すなわち、以下の二つが成り立つ。

(1.1) $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset \text{Cof}(I_{cpt})$ である。

(1.2) $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

(2) $\text{rlp}(I_{cpt}) = \text{rlp}(J_{cpt}) \cap W_{cpt}$ である。すなわち、以下の三つが成り立つ。

(2.1) $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset \text{rlp}(J_{cpt})$ である。

(2.2) $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

(2.3) $\text{rlp}(I_{cpt}) \supset \text{rlp}(J_{cpt}) \cap W_{cpt}$ である。

(3) 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W_{cpt} に含まれるならば、残りの一つも W_{cpt} に含まれる。

(4) I_{cpt} と J_{cpt} は小対象引数を許容する。

順番に確かめていこう。

(1.1) $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset \text{Cof}(I_{cpt})$ である。

以下の分解により、 $J_{cpt} \subset \text{cell}(I_{cpt})$ である。

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda_i^n)_{/L} \cup_{(\Lambda_i^n)_{/K}} \Delta_{/K}^n & \longrightarrow & \partial \Delta_{/L}^n \cup_{\partial \Delta_{/K}^n} \Delta_{/K}^n & \longrightarrow & \Delta_{/L}^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \partial \Delta_{/L}^{n-1} \cup_{\partial \Delta_{/K}^{n-1}} \Delta_{/K}^{n-1} & \longrightarrow & \Delta_{/L}^{n-1} & & \end{array}$$

よって $\text{cell}(J_{cpt}) \subset \text{cell}(I_{cpt})$ である。よって $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset \text{Cof}(I_{cpt})$ である。

(1.2) $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

擬位相空間 X およびコンパクト部分集合 $K \subset B$ に対し、 $X_{/K} = X_{/B} \times \mathbf{1}_{/K}$ が成り立つ。 $J_{\mathbf{qTop}}$ に含まれる任意の射 $X \rightarrow Y$ に対し、 $X_{/B} \rightarrow Y_{/B}$ は sectionwise に非輪状余束である。任意のコンパクト部分集合の組 $K \subset L$ に対し、 $\mathbf{1}_{/K} \rightarrow \mathbf{1}_{/L}$ は sectionwise に余束である。 \mathbf{qTop} はデカルト閉モデル圏だから、 $X_{/L} \coprod_{X_{/K}} Y_{/K} \rightarrow Y_{/L}$ は sectionwise に非輪状余束である。よって任意の $f \in \text{Cof}(J_{cpt})$ は sectionwise に非輪状余束である。特にこれは弱同値である。以上より $\text{Cof}(J_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

(2.1) $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset \text{rlp}(J_{cpt})$ である。

次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & f \in \text{rlp}(I_{cpt}) \\ \Leftrightarrow & I_{\mathbf{qTop}} \dashv f_{K \subset L} \text{ (for } \forall K, L) \\ \Rightarrow & J_{\mathbf{qTop}} \dashv f_{K \subset L} \text{ (for } \forall K, L) \\ \Leftrightarrow & f \in \text{rlp}(J_{cpt}) \end{aligned}$$

よって $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset \text{rlp}(J_{cpt})$ である。

(2.2) $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

任意の $f \in \text{rlp}(I_{cpt})$ に対し、 $f_{\emptyset \subset K} : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ は非輪状束である。特にこれは弱同値である。 \mathcal{F} と \mathcal{G} が添加前層であることから、 $f_K = f_{\emptyset \subset K}$ である。よって $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

(2.3) $\text{rlp}(I_{cpt}) \supset \text{rlp}(J_{cpt}) \cap W_{cpt}$.

任意の $f \in \text{rlp}(J_{cpt}) \cap W_{cpt}$ をとる。 $f \in \text{rlp}(J_{cpt})$ だから、 $f_{K \subset L}$ は束である。特に $f_K = f_{\emptyset \subset K} : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ は束である。 $f \in W_{cpt}$ より f_K は非輪状束である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(L) & \xrightarrow{f_L} & \mathcal{G}(L) \\ & \searrow f_{K \subset L} & \uparrow \cong \\ & \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) & \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}(L) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{f_K} \mathcal{G}(K) \end{array}$$

非輪状束の引き戻しは非輪状束であるので、上記の $\mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) \rightarrow \mathcal{G}(L)$ は非輪状束である。特にこれは弱同値である。よって $f_{K \subset L}$ は弱同値である。 $f_{K \subset L}$ は束でもあったので、これは非輪状束である。これは $f \in \text{rlp}(I_{cpt})$ を意味する。以上より $\text{rlp}(I_{cpt}) \subset W_{cpt}$ である。

(3) 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W_{cpt} に含まれるならば、残りの一つも W_{cpt} に含まれる。

明らか。

(4) I_{cpt} と J_{cpt} は小対象引数を許容する。

次の随伴を考える。

$$\mathbf{qTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{G_K} \\ \top \\ \xrightarrow{X \mapsto X/K} \end{array} PSh_*(\tilde{\mathcal{W}}_B; \mathbf{qTop})$$

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の余極限は objectwise に余極限なので、 G_K は全ての余極限を保つ。命題 C.1.25 より、関手 $X \mapsto X_{/K}$ は任意の小さい対象を保つ。例 C.1.21 より、任意の $(X \rightarrow Y) \in I_{\mathbf{qTop}}$ と任意の $(X' \rightarrow Y') \in J_{\mathbf{qTop}}$ に対し、 X, X', Y および Y' はすべて小さい。よって任意のコンパクト集合 $K \subset B$ に対し、 $X_{/K}, X'_{/K}, Y_{/K}$ および $Y'_{/K}$ はすべて小さい。系 C.1.23 より、 $X_{/L} \amalg_{X_{/K}} Y_{/K}$ と $X'_{/L} \amalg_{X'_{/K}} Y'_{/K}$ は小さい。以上より I_{cpt} と J_{cpt} は小対象引数を許容する。□

2.4.3 各点射影的モデル構造

次の随伴を考える。

$$\prod_{x \in B} \mathbf{qTop} \begin{array}{c} \xleftarrow{G_{pt}} \\ \xrightarrow{F_{pt}} \end{array} PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$$

ただし、

- $G_{pt}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}(\{x\}))_{x \in B}$
- $[F_{pt}((X^x)_{x \in B})](U) = \begin{cases} \emptyset & (|U| \geq 2) \\ X^x & (U = \{x\}) \\ \mathbf{1} & (U = \emptyset). \end{cases}$

系 C.3.4 と命題 C.3.5 より、次の定理を得る。

定理 2.4.4 (各点射影モデル構造). 圏 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ は以下を満たすモデル構造を持つ。

- $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が弱同値である
 \Leftrightarrow 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_{\{x\}}: \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が弱同値である。
- $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が束である
 \Leftrightarrow 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_{\{x\}}: \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が束である。

さらに、このモデル構造は右正則である。

証明. 命題 C.3.5 より、圏 $\prod \mathbf{qTop}$ は余束生成モデル構造を持ち、 $W = \prod W_{\mathbf{qTop}}$ を弱同値のクラスとし、 $I = \prod \bar{I}_x$ が余束を、 $J = \prod \bar{J}_x$ が非輪状余束を生成する。ただし、 \bar{I}_x および \bar{J}_x は次のように定義されている。(cf. 命題 C.3.5)

$$\bar{I}_x = \left(\prod_{y \in B, y \neq x} \{id_\emptyset\} \right) \times I_x$$

$$\bar{J}_x = \left(\prod_{y \in B, y \neq x} \{id_\emptyset\} \right) \times J_x$$

系 C.3.4 を応用するため、次を示す。

1. G_{pt} は任意の余極限を保つ。
2. $G_{pt}(F_{pt}(I)) \subset \text{cell}(I)$ かつ $G_{pt}(F_{pt}(J)) \subset \text{cell}(J)$ である。

\square \mathbf{qTop} 上の余極限と $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の余極限は、どちらも objectwise に計算できる。よって G_{pt} は任意の余極限を保つ。また、 $G_{pt}F_{pt} \cong Id$ より $G_{pt}(F_{pt}(I)) \subset \text{cell}(I)$ かつ $G_{pt}(F_{pt}(J)) \subset \text{cell}(J)$ である。以上より系 C.3.4 の条件を満たすので、圏 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ は求めるモデル構造を持つ。

さらに、このモデル構造について全ての対象は束対象である。よって、命題 C.5.9 より、このモデル構造は右正則である。 \square

2.4.4 各点可撓モデル構造

コンパクト可撓モデル構造と各点射影モデル構造を混合して、各点可撓モデル構造を得る。ここで定理 C.6.1 を使う。

定理 2.4.5. 圏 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ は以下を満たすモデル構造を持つ。

- $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が弱同値である
 \Leftrightarrow 任意の点 $x \in B$ に対し、 $f_{\{x\}} : \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が弱同値である。
- $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が束である
 \Leftrightarrow 任意のコンパクト部分集合の組 $K \subset L \subset B$ に対し、 $f_{K \subset L} : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(L) \times_{\mathcal{G}(L)} \mathcal{G}(K)$ が束である。

さらに、このモデル構造は右正則である。

証明. \square

直ちに次を得る。

定理 2.4.6. あるモデル圏 $PSh_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ および充満忠実かつ有限極限を保つ埋め込み $\iota : \mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow PSh_*(B_{cpt}; \mathbf{qTop})$ が存在し、次を満たす。

- $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し、
 $\iota(f)$ が弱同値である $\Leftrightarrow f$ は *stalkwise* に弱同値である。
- $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f に対し、
 $\iota(f)$ が束である $\Leftrightarrow f$ が可撓拡張である。
 特に、 B 上の連続層 \mathcal{F} に対し、
 $\iota(\mathcal{F})$ が束対象である $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が可撓である。

証明. 定理 2.4.5 と命題 2.4.2 より明らか。 \square

2.5 形式的切断の層

2.5.1 形式的切断の層

微分関係 R とはジェット束の部分束であり、ファイバー束 R の連続な切断を偏微分関係 R の形式的解と呼ぶのであった。ここでは任意の連続層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F} の“形式的切断”の層 \mathcal{F}^* が構成できることを述べる。

まずは定義を述べよう。

定義 2.5.1. 位相空間 B 上の連続層 \mathcal{F} に対し、 B 上の前層 \mathcal{F}^\square を

$$\mathcal{F}^\square(U) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^q(U)}$$

によって定義する。前層 \mathcal{F}^\square の層化を \mathcal{F}^* と書き、これを \mathcal{F} の形式的切断 (*formal section*) の層または *fiberwise holonomic* 切断の層と呼ぶ。

各射影 $\mathcal{F}(U) \times \text{Sing}^q(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ に対応する射 $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^q(U)}$ が導く層の射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ を対角射と呼ぶ。

注意 2.5.2. 対角射をしばしば $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ で表す。これはしばしば誤解を招く表記であるが、ここでは Gromov [8] の表記に合わせる。

注意 2.5.3. 偏微分関係の形式的解と比べると、上記の定義は奇妙に思われるかもしれない。実際、これは *fiberwise holonomic* 切断の層と呼ぶ方が正確である。(cf. [4, p.24]) しかし、実用上これらを区別する必要がないことから、ここでは形式的切断の層と呼ぶ。詳しい説明は本節の後半に回す。

連続層のパラメータ化

形式的切断の層には別の構成もある。まずは連続層のパラメータ化を定義する。

定義 2.5.4. 位相空間 B 上の連続層 \mathcal{F} および位相空間 P に対し、景 $B_{\text{top}} \times P_{\text{top}}$ 上の前層 $\mathcal{F}^{\square P}$ を

$$\mathcal{F}^{\square P}(U, V) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^q(V)}$$

によって定義する。前層 $\mathcal{F}^{\square P}$ の層化を \mathcal{F}^P と書く。 \mathcal{F}^P は景 $B_{\text{top}} \times P_{\text{top}}$ 上の層 (すなわち、 G -位相空間 $B \times P$ 上の層) であるが、これは位相空間 $B \times P$ 上の層と見做せる。 $B \times P$ 上の層 \mathcal{F}^P を \mathcal{F} の P -パラメータ化と呼ぶ。

特に、 $P = B$ の場合を考える。対角射 $B \rightarrow B \times B$ によって連続層 \mathcal{F}^B を引き戻すことができるが、この引き戻しとして得られる B 上の連続層が \mathcal{F} の形式的切断の層である。

命題 2.5.5. 形式的切断の層の、上記の二つの定義は同値である。

証明. ここでは、 $B \times B$ を G -位相空間としての積の構造を入れて考える。前層 $\mathcal{F}^{\square B}$ の対角射 $\Delta : B \rightarrow B \times B$ による引き戻しを $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}$ と書く。 $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}$ の層化が \mathcal{F}^* に同型であることを示せばよい。各開集合 $U \subset B$ に対し、 $\Delta(U) \subset B \times B$ を含む最小の認容開集合は $U \times U$ である。よって、 $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B}(U) \cong \mathcal{F}^{\square B}(U \times U) = \mathcal{F}(U)^{\text{Sing}^q(U)}$ である。すなわち $\Delta^p \mathcal{F}^{\square B} \cong \mathcal{F}^{\square}$ である。よって、この層化は \mathcal{F}^* に同型である。 \square

2.5.2 Gromov の補題

Gromov は、底空間 B が多面体であるとき、任意の連続層 \mathcal{F} に対して次の性質を示した。

1. 対角射 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱同値である。
2. 形式的切断の層 \mathcal{F}^* は可撓層である。

2. の証明は次節に回す。(cf. 補題 2.6.3) ここでは 1. を証明する。

まず、底空間 B が満たすべき性質を定義する。

定義 2.5.6. 位相空間 B が強局所可縮であるとは、任意の点 $x \in B$ に対し、 x を強変位レトラクトとする開近傍からなる近傍基が存在することを言う。

補題 2.5.7 (Gromov [8], Y.). B は局所強可縮空間とする。 B 上の任意の連続層 \mathcal{F} に対し、対角射 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は *stakwise* に弱同値である。

証明. 命題 1.3.7 より、下図のような可換な四角図式が存在した時、下図の γ が存在して上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial \Delta^n$ を固定するホモトピーによる同値を除いて可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{F}_x \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \Delta_x \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{F}_x^* \cong \mathcal{F}_x^{\square} \end{array}$$

x の十分小さい開近傍 U をとり、次の図式を考えてよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \Delta_x \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}(U)^U \end{array}$$

B は局所強可縮だから、 $x \in U$ は強変位レトラクション $p_u : U \rightarrow U$ を持つとしてよい。 p_u は $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)^U$ の強変位レトラクション $H_u : \mathcal{F}(U)^U \rightarrow \mathcal{F}(U)^U$ を導く。 $\gamma = H_1 \circ \beta : \Delta^n \rightarrow \mathcal{F}(U)$ は上三角を可換にし、下三角をホモトピー $H_u \circ \beta$ による同値を除いて可換にする。ホモトピー $H_u \circ \beta$ は $\partial \Delta^n$ を固定する。以上より、 Δ_x が弱同値であることが示された。 \square

2.5.3 偏微分関係の解の層

前々小節で述べたように、 \mathcal{F}^* を形式的切断の層と呼ぶのは適切ではない。本小節では \mathcal{F} が偏微分関係 R の厳密解の層 $\text{Sol}(-; R)$ である場合を考え、 $\text{Sol}^*(-; R)$ が何を意味するのかを考察する。 $\text{Sol}^*(-; R)$ の切断は fiberwise holonomic 切断 (cf. [4, p.24]) と呼ばれる対象であり、その意味は局所的な厳密解を連続的に指定したものである。さらに、標準的な射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が存在し、ある程度良い条件の下ではこれは sectionwise に弱同値である。

偏微分関係における形式的切断

“形式的切断”と“形式的解”の違いについて補足する。 $p: E \rightarrow B$ を滑らかなファイバー束とし、 $R \subset J^1 E$ を偏微分関係とする。 $\text{Sol}(-; R)$ は偏微分関係 R の厳密解の層とする。ここで、 R の厳密解とは、ファイバー束 R の切断であって、 p の切断の持ち上げとして得られるもののことであった。

注意 2.5.8. ここで、 R の厳密解を「 p の切断であって、持ち上げの像が R に含まれるもの」と定義しない理由は、擬位相空間としての構造の入れ方に違いがあるからである。 $\text{Sol}(U; R)$ は $\Gamma(U; R)$ と $\Gamma(U; p)$ のどちらにも包含されていると見做すことができる。しかし、ここでは $\Gamma(U; p)$ に包含されているとは考えず、 $\Gamma(U; R)$ から導かれる“相対擬位相”を入れるのである。具体的には次のように定める。各閉集合 $K \subset \Delta^n$ に対し、

$$\text{Sol}[K](U; R) = \{s: K \times U \rightarrow R \mid \text{各 } t \in K \text{ に対し、} s_t: U \rightarrow R \text{ は厳密解。}\}$$

とすることで擬位相空間 $\text{Sol}(U; R)$ が定まり、これによって連続層 $\text{Sol}(-; R)$ が定まる。

各位相空間 P に対し、位相空間 $B \times P$ 上の層 $\text{Sol}^P(-; R)$ が

$$\text{Sol}^P(U \times V; R) = \{s: U \times V \rightarrow R \mid \text{各 } p \in V \text{ に対し、} s_p: U \rightarrow R \text{ は厳密解。}\}$$

によって定まる。対角射 $B \rightarrow B \times B$ によって連続層 $\text{Sol}^B(-; R)$ を引き戻すと、 $\text{Sol}^*(-; R)$ が得られる。各切断 $s \in \text{Sol}^*(U; R)$ とは、 R の厳密解の芽を連続的に繋いだものである。このような切断を fiberwise holonomic 切断と呼ぶ。(cf. [4, p.24]) 一方、 R の形式的解とは単にファイバー束 R の連続的切断のことであった。各 fiberwise holonomic 切断 $s(x, y)$ に対し、形式的解 $s(x, x)$ を対応させることにより、連続層の射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が定まる。これは次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol}(-; R) & \longrightarrow & \text{Sol}^*(-; R) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Gamma(-; R) \end{array}$$

命題 2.5.9. 連続層 $\Gamma(-; R)$ は可撓である。

証明. 任意の二つのコンパクト部分集合 $K \subset L \subset B$ をとり、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(L; R) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ \Delta^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(K; R) \end{array}$$

γ の存在を示せばよい。

十分小さい二つの開集合 $U \supset K$, $W \supset L$ ($U \subset W$) および二つの擬連続写像 $\tilde{\alpha} : \Delta^n \times \{0\} \rightarrow \Gamma(W; R)$, $\tilde{\beta} : \Delta^n \times I \rightarrow \Gamma(U; R)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(W; R) & & \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow & \searrow & \\ \Delta^n \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(L; R) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n \times [0, 1] & \nearrow \tilde{\beta} & \Gamma(U; R) & \searrow & \Gamma(K; R) \\ & \xrightarrow{\beta} & & & \end{array}$$

$\tilde{\alpha}' : \Delta^n \times \{0\} \times W \rightarrow R$, $\tilde{\beta}' : \Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow R$ を $\tilde{\alpha}'(x, 0, p) = \tilde{\alpha}(x, 0)(p)$, $\tilde{\beta}'(x, t, p) = \tilde{\beta}(x, t)(p)$ で定めると、これは連続である。

今、コンパクト台を持つ連続関数 $\delta : U \rightarrow [0, 1]$ で、 K を含む開集合上で $\delta \equiv 1$ なるものをとる。これを用いて、 $\phi : \Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow \Delta^n \times [0, 1] \times U$ を $\phi(x, t, p) = (x, t\delta(p), p)$ として定める。また、 $W' = W - \text{supp}(\delta)$ として、 $\psi : \Delta^n \times [0, 1] \times W' \rightarrow \Delta^n \times \{0\} \times W'$ を $\psi(x, t, p) = (x, 0, p)$ として定める。 $\tilde{\beta}' \circ \phi$ と $\tilde{\alpha}' \circ \psi$ は上手く貼り合せて、 $\tilde{\gamma}' : \Delta^n \times [0, 1] \times W \rightarrow R$ を定める。 $\tilde{\gamma} : \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Gamma(W; R)$ を $\tilde{\gamma}(x, t)(p) = \tilde{\gamma}'(x, t, p)$ で定め、 $\Delta^n \times [0, 1] \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \Gamma(W; R) \rightarrow \Gamma(L; R)$ なる合成を γ とすれば条件を満たす。 \square

また、後 (cf. 補題 2.6.3) で示す通り、任意の連続層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F}^* も可撓層である。系 2.3.13 より、次が成り立つ。

命題 2.5.10. 射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が *stalkwise* に弱同値ならば、これは *sectionwise* に弱同値である。

証明は次の小々節に回すが、例えば R が開であれば射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ は *stalkwise* に弱同値である。

局所解の初期値に対する連続性

射 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ が *stalkwise* に弱同値であるとはどういうことか考察する。これはすなわち、任意の点 $x \in B$ に対し、次のような四角形の可換図式を考えると、斜めに

横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を止めたホモトピーで可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \text{Sol}^*(x; R) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(x; R) \end{array}$$

ここで、 $\beta : \Delta^n \rightarrow \Gamma(x; R)$ は x のある開近傍 U をとって、ある Δ^n をパラメータに持つ連続な切断 $\tilde{\beta} : \Delta^n \times U \rightarrow R$ の芽である。 $\tilde{\beta}$ を、 $\Delta^n \times U$ に依存する連続な“初期値”の族と考えよう。すなわち、各 $(z, y) \in \Delta^n \times U$ に対し、 $\tilde{\beta}(z, y) = s(y)$ を満たす厳密解 $s \in \text{Sol}(U; R)$ を探す。斜めに横断する射 γ とは厳密解の連続な族のことであるが、上図の下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を止めたホモトピーで可換にすることは、“初期値”の族 $\tilde{\beta}$ を高々 $\partial\Delta^n$ を止めたホモトピーで変形することで、連続的な解の族 γ が得られるということである。さらに、上図の上三角を可換にすることは、もともと $\partial\Delta^n \times U$ に依存する連続な厳密解の族 $\tilde{\alpha}$ が存在した時、上記のような連続的な解の族 γ を、 $\partial\Delta^n \times U$ への制限がもとの族 $\tilde{\alpha}$ に一致するようにとれるということである。

例えば偏微分関係 R が開であれば、この条件を満たす。ただし、簡単のため、ここでは次の形で証明する。

命題 2.5.11. R は開とする。このとき、射 $\text{Sol}(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ は *stalkwise* に弱同値である。

証明. 次のような四角形の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \text{Sol}(x; R) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(x; R) \end{array}$$

斜めに横断する射 γ が存在し、図式の上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を止めたホモトピーで可換にすることを示せばよい。

十分小さい x の開近傍 U および二つの擬連続写像 $\tilde{\alpha} : \partial\Delta^n \rightarrow \text{Sol}(U; R)$, $\tilde{\beta} : \Delta^n \rightarrow$

$\Gamma(U; R)$ が存在して、次の図式を可換とする。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Sol}(U; R) & \\
 \nearrow \tilde{\alpha} & \uparrow & \searrow \\
 \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \text{Sol}(x; R) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(x; R) \\
 \nearrow \tilde{\beta} & \downarrow & \searrow \\
 & \Gamma(U; R) &
 \end{array}$$

$\tilde{\beta}$ は Δ^n をパラメータに持つ連続な切断 $\tilde{\beta}: \Delta^n \times U \rightarrow R$ と見做せる。ジェット束の定義より、各 $z \in \Delta^n$ に対して $\tilde{\beta}(z, x) = j_x^r s^z \in R$ と表せる。また、 U を十分小さくとれば、各 s^z は r -次の多項式としてよい。 $\tilde{\beta}'(z, y) = j_y^r s^z$ によって $\tilde{\beta}': \Delta^n \times U \rightarrow J^r E$ を定める。 s^z を多項式として取ったことなどから、 $\tilde{\beta}'$ は連続である。 R が開であることとより、 U をさらに小さく取り直して $\tilde{\beta}': \Delta^n \times U \rightarrow R$ としてよい。

また、 $\tilde{\alpha}$ は $\partial\Delta^n$ をパラメータに持つ厳密解 $\tilde{\alpha}: \partial\Delta^n \times U \rightarrow R$ と見做せる。すなわち、 $\partial\Delta^n$ をパラメータに持つ滑らかな切断 $\underline{\alpha}: \partial\Delta^n \times U \rightarrow E$ で、 $\tilde{\alpha} = j^r \underline{\alpha}$ を満たすものが存在する。 $\sigma: \partial\Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow E$ を

$$\sigma(z, t, x) = t s^z(x) + (1 - t) \underline{\alpha}(z, x)$$

によって定める。² U を小さく取り直せば σ は $\partial\Delta^n \times [0, 1]$ をパラメータに持つ厳密解 $j^r \sigma: \partial\Delta^n \times [0, 1] \times U \rightarrow R$ を導く。 $j^r \sigma$ と $\tilde{\beta}'$ を連結することで、 Δ^n をパラメータに持つ厳密解 $\tilde{\gamma}: \Delta^n \times U \rightarrow R$ を得る。 U を十分小さくとり、 R 上にリーマン計量の一つ固定しておけば、測地線によって $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\beta}$ はホモトピックである。これらは $\partial\Delta^n$ 上で同じ値をとっているため、その間の測地線は定値であり、すなわち上記のホモトピーは $\partial\Delta^n$ 上で固定される。 $\tilde{\gamma}: \Delta^n \times U \rightarrow R$ の $x \in U$ における芽を $\gamma: \Delta^n \rightarrow \text{Sol}(x; R)$ とすれば、これが求める γ である。□

後で示す通り、射 $\text{Sol}(-; R) \rightarrow \text{Sol}^*(-; R)$ は stalkwise に弱同値である。よって、 $\text{Sol}^*(-; R) \rightarrow \Gamma(-; R)$ は可撓層の間の stalkwise に弱同値な射である。すなわち、これは sectionwise に弱同値である。

2.6 ABC 前束構造

前々節では連続層の圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ があるモデル圏の中に埋め込めることを示した。圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 自身にモデル構造を定義できない理由は、 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ において余束の存

² E 上に和の構造が定まっていないので、上記の定義は厳密性に欠ける。しかし、 U を小さく取り直せば s^z と $\underline{\alpha}$ は同じアフィンチャート上に値を持つとしてよく、さらにその間を繋ぐ $\sigma(z, t, x)$ も全て同じアフィンチャート上に値が取れるとしてよい。

在が期待できないからであった。そこで、本節では余束の存在公理を落として、弱同値と束のみからなる構造を連続層の圏 $\mathbf{Sh}(B; \mathbf{qTop})$ 上に定義する。そのような構造を ABC 前束構造 (Anderson-Brown-Cisinski prefibration structure) [23] と呼ぶ。(cf. 第 2.6.2 節) 弱同値と束が満たすべき公理の多くは、埋め込まれたモデル圏構造から直ちに導かれる。しかし、“写像蹟”の存在公理だけはそのようにして得ることができない。そこで、形式的切断の層の構成を一般化することで、連続層の間の任意の射に対し“写像蹟”を構成する。(cf. 第 2.6.1 節)

2.6.1 可撓蹟

$f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は B 上の連続層の間の射とする。 f は形式的切断の層の間の射 $\tilde{f}: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ を導く。 \tilde{f} の写像蹟を $\tilde{f}': \mathcal{F}_f^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ と表す。

定義 2.6.1. 上記の \tilde{f}' を f の可撓蹟と呼ぶことにする。

注意 2.6.2. $\mathcal{G} = \mathbf{1}$ のとき、 $\mathcal{G}^* = \mathbf{1}$ である。よって $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_f^*$ である。

可撓蹟に関して、次の性質が成り立つ。

補題 2.6.3 (Gromov [8], Y.). B は正規ハウスドルフ空間とする。 B 上の連続層の間の任意の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f の可撓蹟 \tilde{f}' は可撓拡張である。特に、 B 上の任意の連続層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F}^* は可撓層である。

証明. 擬位相空間の射 $\tilde{f}'_{KCL}: \mathcal{F}_f^*(L) \rightarrow \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L)$ が束であることを示す。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_f^*(L) \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow \tilde{f}'_{KCL} \\ \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L) \end{array}$$

($[0, 1]_1$ は閉区間 $[0, 1]$ のコピーである。この後現れる閉区間と区別するため、右下に添え字を置いている。) K の十分小さい開近傍 U および L の十分小さい開近傍 V で、 $U \subset V$ を満たすものをもって、次の図式を考えてよい。

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{F}_f^*(V) \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}'_{UCV} \\ \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{F}_f^*(U) \times_{\mathcal{G}^*(U)} \mathcal{G}^*(V) \end{array}$$

$\mathcal{F}_f^*(V) = \mathcal{F}^*(V) \times_{\mathcal{G}^*(V)} \mathcal{G}^*(V)^{[0,1]_2}$ より、 $\tilde{\alpha}: \Delta^{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_f^*(V)$ は、次の α^1 と α^2 を用いて $\tilde{\alpha} = \alpha^1 \times \alpha^2$ と表せる。

$$\begin{aligned} \alpha^1 &: \Delta^{n-1} \rightarrow \mathcal{F}^*(V) \\ \alpha^2 &: \Delta^{n-1} \rightarrow \mathcal{G}^*(V)^{[0,1]_2}. \end{aligned}$$

($[0, 1]_2$ は閉区間 $[0, 1]$ のコピーである。閉区間 $[0, 1]_1$ と区別するため、右下に添え字を置いている。) 同様に $\tilde{\beta}$ も分解する。まず、次の β^1 と β^2 を用いて $\tilde{\beta} = \beta^1 \times \beta^2$ と表せる。

$$\begin{aligned}\beta^1 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(U) \\ \beta^2 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{G}^*(V).\end{aligned}$$

β^1 はさらに、次の β^{11} と β^{12} を用いて $\beta^1 = \beta^{11} \times \beta^{12}$ と表せる。

$$\begin{aligned}\beta^{11} &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}^*(U) \\ \beta^{12} &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{G}^*(U)^{[0, 1]_2}\end{aligned}$$

台関数 $\phi: V \rightarrow [0, 1]$ で、 $\text{supp}(\phi) \subset U$ および K のある開近傍上で $\phi \equiv 1$ を満たすものをとる。 $W = V - \text{supp}(\phi)$ と置く。

これらのデータを用いて、これから次の射 $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2$ および γ_2^2 を、 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^{11}, \beta^{12}$ および β^2 を用いて構成する。

$$\begin{aligned}\gamma_1^1 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}^*(U) \\ \gamma_2^1 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}^*(W) \\ \gamma_1^2 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{G}^*(U)^{[0, 1]_2} \\ \gamma_2^2 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{G}^*(W)^{[0, 1]_2}\end{aligned}$$

補題 1.3.5 でとった $\Sigma \hookrightarrow [0, 1]_1 \times [0, 1]_2$ の強変位レトラクション $R_u: [0, 1]_1 \times [0, 1]_2 \rightarrow [0, 1]_1 \times [0, 1]_2$ をとる。 $\{0\} \hookrightarrow [0, 1]_1$ の強変位レトラクション $r_u: [0, 1]_1 \rightarrow [0, 1]_1$ が $R_u(s, 0) = (r_u(s), 0)$ によって定まる。連続写像 $\psi: \Delta^{n-1} \times V \times [0, 1]_1 \rightarrow \Delta^{n-1} \times V \times [0, 1]_1$ を $\psi(p, x, s) = (p, x, r_{1-\phi(x)}(s))$ によって定める。同型 $\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \cong \Delta^n$ によって同一視し、 $\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1$ を $\mathbf{Sing}\Delta$ の対象と見做す。 ψ は V 上の (集合に値を持つ) 前層の射 $\mathcal{F}^\square[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1]_V \rightarrow \mathcal{F}^\square[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1]_V$ を導く。層化関手により、これは V 上の (集合に値を持つ) 層の射 $\tilde{\psi}: \mathcal{F}^*[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1]_V \rightarrow \mathcal{F}^*[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1]_V$ を導く。各開集合 $V' \subset V$ に対し、 $\mathcal{F}[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1](V')$ の各元は射 $\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}^*(V')$ と一対一に対応する。この対応により、 $\gamma_1^1 = \tilde{\psi}(\beta^{11})$ が定まる。

また、 $\gamma_2^1 = \alpha^1|_{W \circ pr}$ が定まる。(ただし、 $\alpha^1|_W$ と pr はそれぞれ合成射 $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\alpha^1} \mathcal{F}^*(V) \rightarrow \mathcal{F}^*(W)$ と標準的射影 $\Delta^{n-1} \times W \times [0, 1]_1 \rightarrow \Delta^{n-1} \times W$ である。)

連続写像 $\Psi: \Delta^{n-1} \times V \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2 \rightarrow \Delta^{n-1} \times V \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2$ を $\Psi(p, x, s, t) = (p, x, R_{1-\phi(x)}(s, t))$ によって定める。同型 $\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2 \cong \Delta^{n+1}$ によって同一視し、 $\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2$ を $\mathbf{Sing}\Delta$ の対象と見做す。先ほどと同様に、 Ψ は V 上の (集合に値を持つ) 層の射 $\tilde{\Psi}: \mathcal{G}^*[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2]_V \rightarrow \mathcal{G}^*[\Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \times [0, 1]_2]_V$ を導く。これにより $\gamma_1^2 = \tilde{\Psi}(\beta^{12})$ が定まる。

ν_1 と ν_2 を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\nu_1 &: \Delta^{n-1} \times \{0\} \times [0, 1]_2 \xrightarrow{\cong} \Delta^{n-1} \times [0, 1]_2 \xrightarrow{\alpha^2} \mathcal{G}^*(W) \\ \nu_2 &: \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \times \{1\} \xrightarrow{\cong} \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \xrightarrow{\beta^2} \mathcal{G}^*(W).\end{aligned}$$

図式 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が可換であることから、 $\Delta^{n-1} \times W \times \{0\} \times \{1\}$ 上で $\nu_1 = \nu_2$ である。よってこれは射 $\nu : \Delta^{n-1} \times W \times \Sigma \rightarrow \mathcal{G}^*(W)$ を定める。これにより $\gamma_2^2 = \nu \circ (id \times R_1)$ が定まる。

γ_1^1 と γ_1^2 は射 $\gamma_1 : \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(U)$ を導く。 γ_2^1 と γ_2^2 は射 $\gamma_2 : \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(W)$ を導く。 γ_1 と γ_2 は $U \cap W$ 上で貼り合い、射 $\tilde{\gamma} : \Delta^{n-1} \times [0, 1]_1 \rightarrow \mathcal{F}_f^*(V)$ を導く。 $\tilde{\gamma}$ は図式 (α, β) のリフト γ を導く。以上より $J_{\mathbf{qTop}} \pitchfork \tilde{f}'_{KCL}$ である。これは \tilde{f}' が可撓拡張であることを意味する。 \square

2.6.2 ABC 前束構造の存在

まず、ABC 前束構造を定義する。

定義 2.6.4 (A. Radulescu-Banu [23]). \mathcal{C} は圏とする。 \mathcal{C} 上の ABC 前束構造 (Anderson-Brown-Cisinski prefibration structure) (W, Fib) とは、弱同値と呼ばれる射のクラス W と、束と呼ばれる射のクラス Fib の組であって、次の公理を満たすものことである。(ただし、クラス $\text{Fib} \cap W$ に属する射を非輪状束と呼ぶ。)

1. \mathcal{C} は終対象 $\mathbf{1}$ を持つ。(モデル圏と同様、 $X \rightarrow \mathbf{1}$ が束であるような対象 X を束対象と呼ぶ。)
2. W と Fib は射の合成について閉じている。
3. 任意の同型射は弱同値であり、終域が束対象である同型射は非輪状束である。
4. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが弱同値ならば、残りの一つも弱同値である。
5. Y と Y' を束対象とし、 $f : X \rightarrow Y$ を束とする。このとき、任意の射 $Y' \rightarrow Y$ に対し f の引き戻し $f' : X' \rightarrow Y'$ が存在し、このような f' は束である。さらに f が非輪状束でもあるならば f' も非輪状束である。
6. 任意の射 f は、 e が弱同値かつ p が束である分解 $f = p \circ e$ を持つ。

ABC 前束構造 (W, Fib) がさらに次を満たすとき、これを ABC 束構造 (Anderson-Brown-Cisinski fibration structure) と呼ぶ。

7. 束の集合 $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_i$ で各終域 (i.e. 各 Y_i) が束対象であるものが存在した時、積対象 $\prod_i X_i$ および $\prod_i Y_i$ が存在し、 $\prod f_i : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ は束である。(特に $Y_i = \mathbf{1}$ の場合を考えれば、束対象の積は束対象である。) さらに各 f_i が非輪状束であれば、 $\prod f_i$ も非輪状束である。
8. 束による可算逆列

$$\dots \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$$

に対し、逆極限 $\varprojlim X_i$ が存在し、 $\varprojlim X_i \rightarrow X_0$ は束である。さらに、任意の f_i が非輪状束であれば、 $\varprojlim X_i \rightarrow X_0$ も非輪状束である。

注意 2.6.5. 弱同値のクラスは \mathcal{C} の部分圏である。一方、束のクラス Fib が部分圏である保証はない。 $f: X \rightarrow Y$ が束であったとしても、 id_X および id_Y が束である保証はないからである。 Y が束対象であれば引き戻しの公理から id_Y は束であり、同様に id_X も束になる。

ABC (Anderson-Brown-Cisinski) とは D. W. Anderson [1]、K. S. Brown [2]、ならびに D.-C. Cisinski の名前に由来する。Brown [2] は単体的層のホモトピー論などを扱うため、任意の対象が束対象である場合に限ってモデル構造を一般化した。その後、Anderson [1] は Brown の定義が一般の場合に拡張できる事実について言及したが、彼は詳しい理論を説明する前に数学者を引退してしまった。Anderson の失われた理論は、Cisinski の手によって再び日の目を見ることになる。A. Radulescu-Banu [23] の論文が現在のところの完成版のようである。

連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{qTop})$ が ABC 前束構造を持つことを示そう。

定理 2.6.6 (Y.). B は強局所可縮な正規ハウスドルフ空間とする。このとき、連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の ABC 前束構造であって、次を満たすものが存在する。

B 上の連続層の間の任意の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、次を満たす。

- f が弱同値である
 $\Leftrightarrow f$ は *stalkwise* に弱同値である。
- f は束である
 $\Leftrightarrow f$ は可撓拡張である。

特に、 B 上の任意の連続層 \mathcal{F} に対し、次を満たす。

- \mathcal{F} が束対象である
 $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ は可撓層である

証明. 定義 2.6.4 の公理 1. から 6. を確かめればよい。公理 1. から 5. は定理 2.4.6 から明らかである。あとは 6. を確かめればよい。

定理 2.4.6 より、次の図式をモデル圏 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ に埋め込んで考える。(モデル構造は各点可撓モデル構造を入れている。)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}_f^* & & \\
 & \nearrow \simeq & \uparrow & \searrow \tilde{f}' & \\
 \mathcal{F}^* & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}^* \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow \simeq \\
 & & \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} & & \\
 \mathcal{F} & \nearrow & & \searrow & \mathcal{G} \\
 & \xrightarrow{\quad f \quad} & & &
 \end{array}$$

補題 2.5.7 より、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ および $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ は stalkwise に弱同値である。補題 2.6.3 より、 f の可撓積 \tilde{f}' は可撓拡張である。 $\mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}_f^*$ は sectionwise に弱同値である。よってこれは stalkwise に弱同値である。モデル圏 $PSH_*(\tilde{\mathcal{W}}_B; \mathbf{qTop})$ は右正則だから、 $\mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_f^*$ は stalkwise に弱同値である。よって、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G}$ は stalkwise に弱同値である。 $\mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は可撓拡張の引き戻しなので、これも可撓拡張である。よって $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は f の求める分解である。以上より公理 6. を満たすことが示された。よって、連続層の圏 $Sh(B; \mathbf{qTop})$ が求める ABC 前束構造を持つことが示された。□

付録 A 圏論からの準備

A.1 圏論の基礎事項と記法

A.1.1 圏と関手

A.1.2 米田の補題

A.1.3 コンマ圏

A.2 エンドとコエンド

A.2.1 楔とエンド

A.2.2 捻射圏

A.3 Kan 拡張

A.3.1 各点 Kan 拡張

A.3.2 コエンドによる表現

A.3.3 米田拡張と随伴

A.4 平坦関手

関手の平坦性を定義する。ここでは **Set**-値の場合しか扱わないが、平坦加群は豊穡関手の平坦性として理解できる。まずはこれを見てみよう。

R を (可換とは限らない) 環としよう。 R はそれ自体がただ一つの対象を持つ前加法圏と見做せる。アーベル群の圏を \mathbf{Ab} と書けば、前加法圏とは \mathbf{Ab} -豊穡圏のことであった。そして加法的関手とは \mathbf{Ab} -豊穡関手のことである。左 R -加群とは加法的関手 $R \rightarrow \mathbf{Ab}$ のこと、右 R -加群とは加法的関手 $R^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ のことと見做せる。すなわち、右 R -加群の圏 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ は R 上の豊穡前層の圏である。ここに、米田埋め込み $y : R \rightarrow \mathbf{Mod}\text{-}R$ が存在するが、これは圏 R のただ一つの対象を R 加群 R へ送る関手である。

左 R -加群 M を一つ固定しよう。 M は、圏 R のただ一つの対象をアーベル群 M へ送る関手 $R \rightarrow \mathbf{Ab}$ と見做せる。ここで、次の図式が考えられる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{R} & & \\ \uparrow y & \searrow (-)\otimes_R M & \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{M} & \mathbf{Ab} \end{array}$$

命題 A.4.1. 関手 $(-)\otimes_R M : \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Ab}$ は M の y に沿った左 Kan 拡張である。

証明. アーベル群としての同型写像 $M \cong R \otimes_R M$ が存在する。これが普遍性を満たすことを示す。

加法的関手 $F : \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Ab}$ と自然変換 $\mu : M \rightarrow F \circ y$ を一つ固定する。 μ は写像 $\mu : M \rightarrow F(R)$ と見做せる。仮に、 $\tilde{\mu} : (-)\otimes_R M \rightarrow F$ なる自然変換で $y^*(\tilde{\mu}) = \mu$ を満たすものが存在したとする。後半の条件は、写像 $M \rightarrow F(R)$ として $\tilde{\mu}_R = \mu$ を満たすことを意味する。

任意の右 R -加群 N に対し、 $N \times M \rightarrow N \otimes_R M \xrightarrow{\tilde{\mu}_N} F(N)$ なる合成を $\hat{\mu}_N$ と置く。元 $n \in N$ を $R \rightarrow N; r \mapsto nr$ と同一視すると、 $\tilde{\mu}$ の自然性から次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \xrightarrow{\hat{\mu}_R} & F(R) \\ n \times id_M \downarrow & & \downarrow F(n) \\ N \times M & \xrightarrow{\hat{\mu}_N} & F(N) \end{array}$$

$\tilde{\mu}_R = \mu$ より、 $\hat{\mu}_R(r, m) = \mu(rm) \in F(R)$ である。よって、上の可換図式は $\hat{\mu}_N(n, m) = F(n)(\mu(m))$ を意味する。すなわち $\hat{\mu}_N$ は F と μ のみによって決まるので、テンソル積の普遍性から、 $\tilde{\mu}$ の一意性が示された。

逆に、 $\hat{\mu}_N(n, m) = F(n)(\mu(m))$ によって $\hat{\mu}_N : N \times M \rightarrow F(N)$ を定義すれば、これはテンソル積の普遍性により $\tilde{\mu}_N : N \otimes_R M \rightarrow F(N)$ を導く。これらは自然変換 $\tilde{\mu} : (-)\otimes_R M \rightarrow F$ を定義し、 $y^*(\tilde{\mu}) = \mu$ を満たす。 \square

左 R -加群 M が平坦であるとは、関手 $(-)\otimes_R M : \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Ab}$ が左完全であることを言った。以上を踏まえ、関手 $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦であるということを、 F の米田関手 $y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U})$ に沿った左 Kan 拡張が左完全であることとして特徴づけたい。

A.4.1 平坦関手

\mathcal{U} は小さい圏とする。関手 $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 F の要素の圏 $\text{el}(F)$ を次の様に定義する。

- $\text{el}(F)$ の対象 (u, x) は \mathcal{U} の対象 u と $F(u)$ の元 $e \in F(u)$ の組 (u, x) とする。

- $\text{el}(F)$ の射 $\sigma : (u, x) \rightarrow (v, y)$ は \mathcal{U} の射 σ であって、 $F(\sigma)(x) = y$ を満たすものとする。

別の言い方をすれば、 $\text{el}(F)$ はコンマ圏 $(\mathbf{1}/F)$ のことである。

定義 A.4.2. 関手 $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦 (*flat*) であるとは、 F の要素の圏 $\text{el}(F)$ が余フィルター圏となることである。関手 $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ が表現平坦 (*representably flat*) であるとは、 \mathcal{V} の任意の対象 v に対し関手 $\mathcal{V}(v, F-): \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦になることである。

平坦関手は次の特徴づけが重要である。

命題 A.4.3. \mathcal{U} は小さい圏とする。関手 $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し次は同値である。

1. F は平坦である。
2. 米田関手 $y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U})$ に沿った F の左 Kan 拡張 $\mathbb{L}_y F$ が平坦である。
3. $\mathbb{L}_y F$ が左完全である。
4. F は表現可能関手のフィルター余極限で書ける。

A.4.2 表現平坦関手

付録B グロタンディーク位相と層

B.1 Grothendieck 位相と景

Grothendieck 位相と景について復習しておく。トポスなどは扱わない。詳しく知りたい方は [15] などを読むとよいかもしれない。

定義 B.1.1. \mathcal{C} は空でない圏とする。 \mathcal{C} 上の Grothendieck(前)位相 (Grothendieck (pre)topology) とは、各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、射の族からなる集合 \mathcal{T}_U を与える写像であって、次の公理を満たすものである。

1. $\phi \in \mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ ならば、 $\phi: \cdot \rightarrow U$ である。すなわち、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ は $\mathcal{C} = \{U_i \rightarrow U\}_i$ の形で書ける。
2. $\phi: V \rightarrow U$ が同型射ならば、 $\{\phi\} \in \mathcal{T}_U$ である。
3. $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ ならば、 \mathcal{C} 上の各射 $V \rightarrow U$ に対し、ファイバー積 $U_i \times_U V$ が存在して $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i \in \mathcal{T}_V$ を満たす。
4. $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \mathcal{T}_U$ かつ $\{U_{ij} \rightarrow U_i\}_j \in \mathcal{T}_{U_i}$ ならば、 $\{U_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \mathcal{T}_U$ である。

この時、各 $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_U$ を U の被覆 (covering) と呼ぶ。Grothendieck 位相を備えた圏のことを景 (site) と呼ぶ。

注意 B.1.2. Grothendieck 位相は篩 (ふるい; sieve) を使って定義されることが多い。この文脈では上記の定義は Grothendieck 前位相と呼ばれることもある。これらの定義は同値である。

注意 B.1.3. 景と言ったときには有限完備性を仮定することが多い。

具体的な例を見る。

例 B.1.4 (位相空間). ある位相空間 X の開集合系を X_{top} とすると、これは包含関係を射として圏となる。ここに、普通の意味での開被覆を被覆として定義すれば Grothendieck 位相が定まり、 X_{top} は景となる。

例 B.1.5. ある位相空間 X の閉集合系を X_{cl} とすると、これは包含関係を射として圏となる。ここに、局所有限閉被覆を被覆として定義すれば Grothendieck 位相が定まり、 X_{cl} は景となる。

また、次の構成も重要である。

例 B.1.6 (自明な位相). \mathcal{U} は任意の圏とする。各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 $\mathcal{T}_U = \{\text{同型射} \cdot \rightarrow U\}$ とすると、 \mathcal{U} は景となる。

例 B.1.7 (積景). \mathcal{U} と \mathcal{V} は景とする。各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ と $V \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ に対し、 $\mathcal{T}_{(U,V)} = \mathcal{T}_U \times \mathcal{T}_V$ とすると、積圏 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ は景となる。

例 B.1.8 (スライス景). \mathcal{U} は景とする。各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 U 上のスライス圏を \mathcal{U}_U とする。すなわち、コンマ圏 (\mathcal{U}/U) を \mathcal{U}_U とする。各 $V \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$ に対し、

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_U \text{ 上の射の族 } \{V_i \rightarrow V\}_{i \in I} \text{ が } V \text{ の被覆である。} \\ \Leftrightarrow & \{V_i \rightarrow V\}_{i \in I} \text{ は } \mathcal{U} \text{ 上の被覆である。} \end{aligned}$$

とすることにより、 \mathcal{U}_U は景となる。

B.2 景上の層

B.2.1 層

まず、一般に前層を定義する。

定義 B.2.1. \mathcal{U} と \mathcal{C} は圏とする。 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の前層 (*presheaf*) とは、反変関手 $\mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ のことである。前層の間の射とは自然変換のことである。

\mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の前層の圏を $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書く。特に $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の時、 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ を単に $\mathbf{PSh}(\mathcal{U})$ と書く。

次に、景上の層を定義する。

定義 B.2.2. \mathcal{U} は景とし、 \mathcal{C} は小完備な圏とする。 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層 (*sheaf*) とは、 \mathcal{U} 上の前層 $\mathcal{F}: \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ であって、次の張り合わせ条件を満たすものである。

$\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば、次の図式は差核 (*equalizer*) である。

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

層の間の射とは自然変換のことである。

\mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層の圏を $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書く。特に $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の時、 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ を単に $\mathbf{Sh}(\mathcal{U})$ と書く。

例 B.2.3. \mathcal{U} を任意の圏とし、自明な位相を入れて景とみなす。この時、景 \mathcal{U} 上の層とは圏 \mathcal{U} 上の前層のことである。

B.2.2 プラス構成と層化

景上でも前層の層化を考えることができる。ただし、層化が定義できるためには前層の値域の圏 \mathcal{C} に制限がかかる。

定義 B.2.4. 圏 \mathcal{C} が帰納極限-積交換性質または IPC 性質 (*inductive-limit-product commutation property*) を満たすとは、任意の余フィルター図式の族 $\{\alpha_s : I_s \rightarrow \mathcal{C}\}_s$ に対し、カノニカルな射 $\lim_{\rightarrow} (\prod_{I_s}^{(i_s) \mapsto \prod \alpha_s(i_s)} \mathcal{C}) \rightarrow \prod (\lim_{\rightarrow} \alpha_s)$ が同型射となることである。

以下、圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。その上で、前層及び層は圏 \mathcal{C} を値に持つとする。

これから前層の“拡張”を定義し、“拡張”を二重に取ったものが層化となることを示す。その中間に位置するものとして、層を一般化した分離的前層を定義しておく。

定義 B.2.5. 景 \mathcal{U} 上の前層 $\mathcal{F} : \mathcal{U}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ が分離的 (*separated*) であるとは、 $\{U_i \rightarrow U\}_i$ が被覆ならば $\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i)$ は単射となることである。

被覆の圏

まず、 \mathcal{U} 上の被覆の圏 $Cov_{\mathcal{U}}$ を定義する。対象はもちろん \mathcal{U} 上の被覆であり、二つの被覆 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$, $\{V_j \rightarrow V\}_{j \in J}$ の間の射 $f : \{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \rightarrow \{V_j \rightarrow V\}_{j \in J}$ とは、添え字の写像 $\tau : I \rightarrow J$ と \mathcal{U} 上の射の族 $f_i : U_i \rightarrow V_{\tau(i)}$ および $f' : U \rightarrow V$ の組で、次の図式を可換とするものである。

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U \\ \downarrow f_i & & \downarrow f' \\ V_{\tau(i)} & \longrightarrow & V \end{array}$$

すると、忘却関手 $\mathcal{P} : Cov_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ が $\mathcal{P}(\{U_i \rightarrow U\}_i) = U$ として定まる。これにより、各対象 $U \in Ob(\mathcal{U})$ の被覆の圏 $Cov(U) = \mathcal{P}^{-1}(U)$ が定まる。 \mathcal{U} 上の射 $f : V \rightarrow U$ が存在した時、制限関手 $f^* : Cov(U) \rightarrow Cov(V)$ が $f^*(\{U_i \rightarrow U\}_i) = (\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i)$ によって定まる。

$Cov(U)$ 上で射 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \rightarrow \{V_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ が存在するとき、 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ は $\{V_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ の細分 (refinement) であるという。

プラス構成

\mathcal{F} は \mathcal{U} 上の前層とする。 \mathcal{U} 上の前層 \mathcal{F}^+ を次のように定義する。

自己関手 $\mathcal{R} : Cov_{\mathcal{U}} \rightarrow Cov_{\mathcal{U}}$ を $\mathcal{R}(\{U_i \rightarrow U\}) = \{U_i \times_U U_j \rightarrow U\}$ によって定める。この時、二つの標準的な自然変換 $\mathcal{R} \circ Id$ が取れる。反変関手 $P^n = P_{\mathcal{F}}^n : Cov_{\mathcal{U}}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ を $P^1(\{U_i\}) = \prod \mathcal{F}(U_i)$, $P^{n+1} = P^n \circ \mathcal{R}$ によって定める。これを用いて、 $K = K_{\mathcal{F}}$ を、図

式 $P^1 \rightrightarrows P^2$ の差核として定める。そこで、 $\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K|_{Cov(U)}$ とする。これはすなわち、 $Cov(U)$ で細分をとり続けた極限である。

さらにこの時、標準的な射 $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ が、自然な射 $\mathcal{F}(U) \rightarrow K_U(\{U \xrightarrow{id} U\}) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ より導かれる。

このような構成をプラス構成 (plus construction) という。

命題 B.2.6. \mathcal{F}^+ は分離的である。

証明. $\{U_i \rightarrow U\}_i$ を被覆とする。 $\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ が単射であればよい。

$\prod Cov(U_i) \rightarrow Cov(U)$ は共終である。よって、 $\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K|_{\prod Cov(U_i)}$ が成り立つ。 $\forall (\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) \in Ob(\prod Cov(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} K(\{V_{ij} \rightarrow U\}) & \longrightarrow & P^1(\{V_{ij} \rightarrow U\}) & \rightrightarrows & P^2(\{V_{ij} \rightarrow U\}) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ \prod K(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) & \longrightarrow & \prod P^1(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) & \rightrightarrows & \prod P^2(\{V_{ij} \rightarrow U_i\}) \end{array}$$

図式の順極限をとると、IPC 性質と差核とフィルター余極限が交換することから、 $\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i)$ は単射である。□

命題 B.2.7. \mathcal{F} は分離的であると仮定すると、 \mathcal{F}^+ は層である。

証明. $\{U_i \rightarrow U\}_i$ を被覆とする。次の図式が差核であることを示せばよい。

$$\mathcal{F}^+(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}^+(U_i) \xrightleftharpoons[r_2]{r_1} \prod \mathcal{F}^+(U_i \times_U U_j)$$

$\forall (\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \in Ob(\prod Cov(U_i))$ について、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \prod P^2(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \rightrightarrows & \prod P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & \xleftarrow{\text{単射}} & P^2(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\}) \\ \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\ \prod P^1(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \rightrightarrows & \prod P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & = & P^1(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \prod K(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) & \rightrightarrows & \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\}) & \xleftarrow{\text{単射}} & K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\}) \end{array}$$

\mathcal{F} が分離的であることから、図式の右上の射が単射である。図式 $\prod K(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \rightrightarrows \prod K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U_i \times_U U_j\})$ の差核を $K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\})$ とすると、図式追跡により $K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\}) \rightarrow K(\{V_{ik} \times_U V_{jl} \rightarrow U\})$ が導かれる。また、 $K(\{V_{ik} \rightarrow U\}) \rightarrow K'(\{V_{ik} \rightarrow U_i\})$ であることも容易にわかる。よって、 $\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim K'|_{\prod Cov(U_i)}$ である。すなわち、初めの図式は差核である。□

普遍性

プラス構成は次の普遍性を満たす。

命題 B.2.8. 任意の前層 \mathcal{F} と層 \mathcal{G} および射 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \mu & \downarrow \mu^+ \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

証明. 各対象 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 $\mu_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を次のように定める。

$\forall (\{U_i \rightarrow U\}) \in \text{Ob}(\text{Cov}(U))$ について、次の図式を可換にする $\mu'_{\{U_i \rightarrow U\}}$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccccc} K(\{U_i \rightarrow U\}) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \\ \mu'_{\{U_i \rightarrow U\}} \downarrow \text{dotted} & & \downarrow \prod \mu_{U_i} & & \downarrow \prod \mu_{U_i \times_U U_j} \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod \mathcal{G}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{G}(U_i \times_U U_j) \end{array}$$

これらは、ただ一つの $\mu_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を導く。 □

よって、プラス構成を二重にとれば、任意の前層に対し、普遍的な層を得ることができる。

系 B.2.9. 任意の前層 \mathcal{F} に対し、 \mathcal{F}^{++} は層である。

さらに、別の層 \mathcal{G} と射 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して、次の図式を可換とする射 $\mu^{++} : \mathcal{F}^{++} \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\nu^2} & \mathcal{F}^{++} \\ & \searrow \mu & \downarrow \mu^{++} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

B.2.3 層の圏

\mathcal{C} に値を持つ \mathcal{U} 上の層の圏 $\text{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ の性質を考察する。やはり圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとす。また、圏 \mathcal{U} は小さいとする。

完備性

まず、層の図式の前層としての極限は層である。

命題 B.2.10. \mathcal{F}_i を層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ 上の図式とする。 \mathcal{F}_i の前層としての極限 $\varprojlim \mathcal{F}_i$ は層である。

証明. 層の貼り合わせ条件は積と差核によって特徴づけられている。積と差核は図式の極限であるため、これらは任意の極限と交換する。すなわち、貼り合わせ条件は極限に対して閉じている。 \square

これは余極限については成り立たないが、構成は単純である。

命題 B.2.11. \mathcal{F}_i を層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ 上の図式とする。 \mathcal{F}_i の前層としての余極限 $\varinjlim \mathcal{F}_i$ の層化は層としての余極限である。

証明. 層化関手 $(-)^{++} : \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は包含関手 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ の左随伴である。よって層化は余極限を保つので、 $\varinjlim \mathcal{F}_i^{++}$ は図式 \mathcal{F}_i^{++} の余極限である。ここで、図式 \mathcal{F}_i^{++} は図式 \mathcal{F}_i と同型である。よって $\varinjlim \mathcal{F}_i^{++}$ は図式 \mathcal{F}_i の余極限である。 \square

以上により、層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は完備かつ余完備であることがわかる。

層化の完全性

層化関手 $(-)^{++} : \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は包含関手 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ の左随伴である。よって層化は余極限を保つ。さらに、層化は有限極限も保つ。

命題 B.2.12. 層化関手 $(-)^{++} : \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ は完全である。

証明. 右完全であることは明らか。左完全であることを示す。層の極限は前層としての極限であったので、プラス構成 $(-)^+ : \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ が左完全であることを示せば、層化関手が完全であることが導かれる。 $(-)^+$ の構成はフィルター余極限によるものであったので、これは有限極限を保つ。すなわち $(-)^+$ は左完全である。よって層化関手は左完全である。以上より、層化関手は完全である。 \square

デカルト閉

ここでは $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ とし、 \mathcal{U} は小さい景とする。 \mathcal{U} 上の集合の層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U})$ について考える。

\mathcal{F}, \mathcal{G} を \mathcal{U} 上の前層とする。各 $U \in \mathit{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) = \mathit{Nat}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_U}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U})$ とする。ただし、 $\mathit{Nat}(-, -)$ は自然変換全体からなる集合である。これにより、前層 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ が定まる。

命題 B.2.13. \mathcal{G} が層ならば $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ も層である。

証明. 次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U) \rightarrow \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i) \xrightarrow[r_2]{r_1} \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i \times_U U_j)$$

$(f_i) \in \prod \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U_i)$ について、 $r_1((f_i)) = r_2((f_i))$ を仮定する。任意の $\forall V = (V \rightarrow U) \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$ をとり、 $V_i = V \times_U U_i$ とする。この時、次の図式を可換にするただ一つの射 $f_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(V_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(V_i \times_V V_j) \\ \downarrow f_V & & \downarrow \prod f_{i, V_i} \qquad \downarrow \prod f_{i, V_i \times_V V_j} \\ \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{G}(V_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{G}(V_i \times_V V_j) \end{array}$$

これにより、ただ一つの自然変換 $f \in \mathcal{G}^{\mathcal{F}}(U)$ が定まる。 \square

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を \mathcal{U} 上の前層とする。各自然変換 $f : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ に対し、 $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ を次のように定義する。

各 $U \in \text{Ob}(\mathcal{U})$, $s \in \mathcal{F}(U)$ に対し、 $g = \hat{f}_U(s) : \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_U} \rightarrow \mathcal{H}|_{\mathcal{U}_U}$ を定義したい。これを、各 $V \in \text{Ob}(\mathcal{U}_U)$, $t \in \mathcal{G}(V)$ に対し、 $g_V(t) = f(r_{V \rightarrow U}(s), t)$ によって定義する。

命題 B.2.14. $f \mapsto \hat{f}$ なる対応により、 $\text{Nat}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \text{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^{\mathcal{G}})$ である。

証明. 逆の対応を作ればよい。これは、各自然変換 $\hat{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{G}}$ に対して、 $f_U(s, t) = (\hat{f}_U(s))_U(t)$ とすれば作れる。 \square

積景上の層

\mathcal{U} と \mathcal{V} は景とする。積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ について考察する。

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{U} \times \mathcal{V}; \mathcal{C}) \cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C}))$$

が成り立つことは簡単にわかる。これから、上記の同型が次の同型を導くことを示す。

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{U} \times \mathcal{V}; \mathcal{C}) \cong \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Sh}(\mathcal{V}; \mathcal{C}))$$

積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上の前層 \mathcal{F} および景 \mathcal{U} の対象 U に対し、圏 \mathcal{C} に値を持つ \mathcal{V} 上の前層 $\mathcal{F}[U]$ を

$$\mathcal{F}[U](V) = \mathcal{F}(U, V)$$

によって定める。さらに、 $U \mapsto \mathcal{F}[U]$ によって定まる、圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C})$ に値を持つ \mathcal{U} 上の前層を \mathcal{F}' と書く。

命題 B.2.15. $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上の前層 \mathcal{F} が層であるための必要十分条件は、任意の U に対し前層 $\mathcal{F}[U]$ が層であり、かつ前層 \mathcal{F}' が層であることである。

証明.

必要性

前層 \mathcal{F} が層であると仮定する。まず、景 \mathcal{U} の任意の対象 U を固定する。景 \mathcal{V} の任意の対象 V および V の任意の被覆 $\{V_i \rightarrow V\}$ に対し、 $\{(U, V_i) \rightarrow (U, V)\}$ は (U, V) の被覆である。よって、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U, V_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U, V_i \times_V V_j)$$

よって前層 $\mathcal{F}[U]$ は層である。

次に、前層 \mathcal{F}' が層であることを示すため、景 \mathcal{U} の任意の対象 U および U の任意の被覆 $\{U_i \rightarrow U\}$ をとる。圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{V}; \mathcal{C})$ 上の極限は sectionwise に計算できるため、景 \mathcal{V} の任意の対象 V をとり、次の図式を考える。

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j, V)$$

$\{(U_i, V) \rightarrow (U, V)\}$ は (U, V) の被覆だから、上の図式は差核である。よって、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}[U] \rightarrow \prod \mathcal{F}[U_i] \rightrightarrows \prod \mathcal{F}[U_i \times_U U_j]$$

すなわち、前層 \mathcal{F}' は層である。

十分性

任意の U に対し前層 $\mathcal{F}[U]$ が層であり、かつ前層 \mathcal{F}' が層であると仮定する。積景 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ の任意の対象 (U, V) および (U, V) の任意の被覆 $\{(U_i, V_j) \rightarrow (U, V)\}$ をとる。次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \xrightarrow[l]{r} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'})$$

ただし、上図の l は $(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \rightarrow (U_i, V_j)$ が導く射であり、 r は $(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \rightarrow (U_{i'}, V_{j'})$ が導く射である。同様に、

- $U_i \times_U U_{i'} \rightarrow U_i$ が導く射を $l^1 : \prod \mathcal{F}(U_i, -) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, -)$ 、
- $U_i \times_U U_{i'} \rightarrow U_{i'}$ が導く射を $r^1 : \prod \mathcal{F}(U_i, -) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, -)$ 、
- $V_j \times_V V_{j'} \rightarrow V_j$ が導く射を $l^2 : \prod \mathcal{F}(-, V_j) \rightarrow \prod \mathcal{F}(-, V_j \times_V V_{j'})$ 、
- $V_j \times_V V_{j'} \rightarrow V_{j'}$ が導く射を $r^2 : \prod \mathcal{F}(-, V_j) \rightarrow \prod \mathcal{F}(-, V_j \times_V V_{j'})$ と書く。

この時、 $l = l^1 \circ l^2 = l^2 \circ l^1$ と $r = r^1 \circ r^2 = r^2 \circ r^1$ に注意する。

圏 \mathcal{C} 上の射 $f : \cdot \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ に対し、 $l \circ f = r \circ f$ を満たしていたと仮定する。このとき、 $l^1 \circ l^2 \circ f = r^1 \circ r^2 \circ f$ である。ここで、 $id \times id : U_i \rightarrow U_i \times_U U_i$ が導く射を $l^1 \circ l^2 \circ f = r^1 \circ r^2 \circ f$ の両辺に左から合成すれば、 $l^2 \circ f = r^2 \circ f$ を得る。(厳密にいえ

ば、 l^1 および r^1 を積の形に分解し、上記の射の合成が存在するよう値域を適切に制限する必要がある。) $l^2 \circ f = r^2 \circ f$ より、次の図式を可換にする f' がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U_i, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i, V_j \times_V V_{j'}) \\ f' \uparrow & \nearrow f & \\ \cdot & & \end{array}$$

先ほどと同様の議論により、 $l^1 \circ f = r^1 \circ f$ である。次の図式の上行は差核である。

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j) \xrightarrow{l^2} \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \\ l^1 \circ f' \uparrow & \nearrow l^1 \circ f = r^1 \circ f & \\ \cdot & & \end{array}$$

よって $l^1 \circ f' = r^1 \circ f'$ である。よって、次の図式を可換にする f'' がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathcal{F}(U, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V) \\ f'' \uparrow & \nearrow f' & \\ \cdot & & \end{array}$$

この f'' は次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U, V) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i, V_j) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'}, V_j \times_V V_{j'}) \\ f'' \uparrow & \nearrow f & \\ \cdot & & \end{array}$$

また、 $\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ は $\mathcal{F}(U, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i, V_j)$ と二つの単射の合成に分解できるので、これは単射である。よって、上記のような f'' は存在すれば一意である。以上より、差核の普遍性が直接証明できた。□

B.3 G-位相空間

B.3.1 G-位相空間

位相空間よりも抽象的で、景よりも具体的な対象を考えたい。具体的に考えたいので、集合 X を固定し、 X 上の構造として景の公理を満たすものを考える。これを X 上の G -位相と呼ぶ。

定義 B.3.1. X を集合とする。 X 上の G -位相 (G -topology) (τ, \mathcal{T}) とは、空でない X の部分集合族 $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ と、写像 $\mathcal{T} : \tau \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の組で、次を満たすものである。

- $U, V \in \tau$ ならば $U \cap V \in \tau$ である。

- 各 $U \in \tau$ と任意の $\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U$ に対し、集合論的に $U = \bigcup_i U_i$ である。
- 各 $U \in \tau$ に対し、 $\{U\} \in \mathcal{T}_U$ である。
- 任意の $\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U$ と $V \subset U$ なる $V \in \tau$ に対し、 $\{U_i \cap V\}_i \in \mathcal{T}_V$ である。
- $\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U$ であり、かつ各 i に対し $\{U_{ij}\}_j \in \mathcal{T}_{U_i}$ ならば、 $\{U_{ij}\}_{ij} \in \mathcal{T}_U$ である。

各 $U \in \tau$ を認容開集合 (*admissible open subset*) と呼び、各 $\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U$ を U の認容被覆 (*admissible covering*) と呼ぶ。G-位相を備えた集合を G-位相空間 (*G-topological space*) と呼ぶ。

具体的な例を見る。

例 B.3.2 (位相空間). ある位相空間 X の開集合を認容開集合、開被覆を認容被覆として定義すれば X 上の G-位相が定まり、 X は G-位相空間となる。

例 B.3.3 (閉集合系). ある位相空間 X の閉集合を認容開集合、局所有限閉被覆を認容被覆として定義すれば X 上の G-位相が定まり、 X は G-位相空間となる。

例 B.3.4 (近傍系). X を位相空間とし、部分集合 $A \subset X$ を固定する。 A の開近傍を認容開集合、開被覆を認容被覆として定義すれば X 上の G-位相が定まり、 X は G-位相空間となる。

この時、 A が空でなければ、空集合が認容開集合とならない (特に位相を定めない) ことに注意。

また、次の構成も重要である。

例 B.3.5 (積空間). (X, τ, \mathcal{T}) と (Y, τ', \mathcal{T}') は G-位相空間とする。各 $U \times V (U \in \tau, V \in \tau')$ を認容開集合、各 $\{U_i \times V_j\}_{ij} (\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U, \{V_j\}_j \in \mathcal{T}'_V)$ を認容被覆とすると、 $X \times Y$ 上の G-位相が定まり、 $X \times Y$ は G-位相空間となる。

例 B.3.6 (左誘導位相). (X, τ, \mathcal{T}) を G-位相空間とし、 $f : A \rightarrow X$ を写像とする。各 $f^{-1}(U) (U \in \tau)$ を認容開集合、各 $\{f^{-1}(U_i)\}_i (\{U_i\}_i \in \mathcal{T}_U)$ を認容開被覆とすると、 A 上の G-位相が定まり、 A は G-位相空間となる。このような位相を誘導位相と呼ぶが、次の例と区別するためここでは左誘導位相と呼ぶことにする。特に f が単射の時、単射によって定まる左誘導位相を相対位相と呼ぶ。

例 B.3.7 (右誘導位相). (X, τ, \mathcal{T}) を G-位相空間とし、 $f : X \rightarrow Y$ を (全射とは限らない) 写像とする。 $U \subset Y$ が認容開集合であることを $f^{-1}(U) \subset X$ が認容開集合であることとして定め、認容開集合による被覆 $\{U_i\}_i$ が認容被覆であることを $\{f^{-1}(U_i)\}_i$ が認容被覆であることとして定める。すると Y 上の G-位相が定まり、 Y は G-位相空間となる。このような位相も誘導位相と呼ぶが、前の例と区別するためここでは右誘導位相と呼ぶことにする。

例 B.3.8 (商位相). (X, τ, \mathcal{T}) を G-位相空間とし、 $f : X \rightarrow Y$ を (全射とは限らない) 写像とする。 $U \subset Y$ が認容開集合であることを $f^{-1}(U) \subset X$ が認容開集合でありかつ

$U = f(f^{-1}(U))$ を満たすこととして定め、認容開集合による被覆 $\{U_i\}_i$ が認容被覆であることを $\{f^{-1}(U_i)\}_i$ が認容被覆であることとして定める。すると Y 上の G-位相が定まり、 Y は G-位相空間となる。このような位相を商位相と呼ぶ。

f が全射でなければ、 Y の部分集合 $Y - f(X)$ はどの認容開集合とも共通部分を持たない。すなわち、認容開集合によって議論されるあらゆる位相的性質に対し、 $Y - f(X)$ に含まれる点は一切の役割を持たない。測度論における零集合のようなものと思えばよい。

注意 B.3.9. 一点集合上 $\mathbf{1}$ の (通常の意味での) 位相はただ一つである。一方、一点集合上には異なる別の G-位相が入りうる。例えば、写像 $\emptyset \rightarrow \mathbf{1}$ によって商位相を入れることができるが、これは全体集合 $\mathbf{1}$ を認容開集合と見做さない。

B.3.2 G-位相空間の射

位相空間の間の連続写像は、開集合の引き戻しが開集合になることとして定義された。G-位相空間の間の連続写像は、さらに認容被覆の引き戻しが認容被覆になることを要求する。

定義 B.3.10 (連続写像). G-位相空間の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ が連続であるとは、次の二つを満たすことである。

- 任意の認容開集合 $U \subset Y$ に対し、逆像 $f^{-1}(U) \subset X$ は認容開集合である。
- 任意の認容開集合 $U \subset Y$ および U の任意の認容被覆 $\{U_i\}_i$ に対し、逆像の族 $\{f^{-1}(U_i)\}_i$ は U の認容被覆である。

連続写像を射として G-位相空間の圏 \mathbf{GTop} が定まる。

例 B.3.11. X を G-位相空間とし、 $f : A \rightarrow X$ を任意の写像とする。 A 上に f による左誘導位相を入れると、 f は連続である。

例 B.3.12. X を G-位相空間とし、 $f : X \rightarrow Y$ を任意の写像とする。 Y 上に f による右誘導位相を入れると、 f は連続である。

例 B.3.13. X を G-位相空間とし、 $f : X \rightarrow Y$ を任意の写像とする。 Y 上に f による商位相を入れると、 f は連続である。

B.3.3 コンパクト性とパラコンパクト性

G-位相空間についてもコンパクト性やパラコンパクト性が定義できる。

定義 B.3.14 (コンパクト性). G-位相空間 X の認容開集合 U がコンパクトであるとは、 U の任意の認容開被覆に対し、それを細分する有限認容開被覆が存在することである。

G-位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ がコンパクトであるとは、 A を含む認容開集合 U が存在し、 A が相対位相についてコンパクトになることである。

定義 B.3.15 (パラコンパクト性). X を G -位相空間とし、 U を X の認容開集合とする。 U の (集合論的) 被覆 $\{A_i\}_i$ が局所有限であるとは、 U の認容開被覆 $\{U_j\}_j$ であって、任意の j に対し $A_i \cap U_j \neq \emptyset$ を満たす i が有限個となるものが存在することを言う。 U がパラコンパクトであるとは、 U の任意の認容開被覆に対し、それを細分する局所有限な認容開被覆が存在することをいう。

G -位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ がパラコンパクトであるとは、 A を含む認容開集合 U が存在し、 A が相対位相についてパラコンパクトになることである。

G -位相空間 X が遺伝的パラコンパクトであるとは、任意の認容開集合がパラコンパクトになることである。

コンパクト性が定義できれば、固有写像も定義できる。

定義 B.3.16 (固有写像). $f : X \rightarrow Y$ を G -位相空間の間の連続写像とする。 f が固有 (*proper*) であるとは、 Y の任意のコンパクト部分集合 $A \subset Y$ に対し、逆像 $f^{-1}(A) \subset X$ がコンパクトであることを言う。

コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトである。これを述べるため、閉部分集合を定義する。

定義 B.3.17. X を G -位相空間とし、 U を X の認容開集合とする。 U の部分集合 $A \subset U$ が相対閉集合であるとは、相対位相に関する A の任意の認容被覆 \mathcal{U} に対し、 U の認容被覆 \mathcal{V} で、 \mathcal{V} の A への制限が \mathcal{U} を細分するものが存在することを言う。特に、 X が認容開集合であるとき、 X の相対閉集合を単に閉集合と呼ぶ。

命題 B.3.18. X をコンパクト G -位相空間とする。 X の閉集合はコンパクトである。

証明. $A \subset X$ を閉集合とする。 A の任意の認容被覆 \mathcal{U} をとる。 A は閉集合だから、 X の認容被覆 \mathcal{V} で、 \mathcal{V} の A への制限が \mathcal{U} を細分するものが存在する。 X はコンパクトだから、 \mathcal{V} を細分する有限認容被覆 \mathcal{W} が存在する。 \mathcal{W} の A への制限は \mathcal{U} を細分する有限認容被覆である。□

B.3.4 分離性

G -位相空間に対して、Hausdorff 性をそのままの意味で定義することはできない。そこで、類似の概念として分離性を導入する。

定義 B.3.19 (分離性). G -位相空間 X が分離的 (*separated*) であるとは、対角射 $X \rightarrow X \times X$ が固有写像になることである。

分離的ならば、特に次が言える。

定義 B.3.20 (分離性). X は分離的 G -位相空間とする。 $A, B \subset X$ はコンパクト部分集合とすると、 $A \cap B \subset X$ もコンパクト部分集合である。

証明. $A, B \subset X$ がコンパクト部分集合ならば、 $A \times B \subset X \times X$ もコンパクト部分集合である。 $A \cap B$ は対角射 $X \rightarrow X \times X$ による $A \times B$ の引き戻しである。対角射 $X \rightarrow X \times X$ が固有写像であれば、 $A \cap B$ はコンパクトである。□

B.4 G-位相空間上の層

B.4.1 G-位相空間上の層

圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。 $X = (X, \tau, \mathcal{T})$ を G-位相空間とすると、 (τ, \mathcal{T}) は小さい景である。よって、 \mathcal{C} に値を持つ $\tau = (\tau, \mathcal{T})$ 上の層を定義することができる。これを \mathcal{C} に値を持つ X 上の層と呼ぶ。層の圏 $\mathbf{Sh}(\tau; \mathcal{C})$ を $\mathbf{Sh}(X; \mathcal{C})$ と書き、前層の圏 $\mathbf{PSh}(\tau; \mathcal{C})$ を $\mathbf{PSh}(X; \mathcal{C})$ と書く。

まずは G-位相空間上の層について基本的な定義を行う。

茎

\mathcal{F} は \mathcal{C} に値を持つ X 上の前層とする。点 $x \in X$ における \mathcal{F} の茎 (stalk) とは、

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

によって定義される \mathcal{C} 上の対象 \mathcal{F}_x のことである。(ただし、 U は x を含む認容開集合全体を動く。)

命題 B.4.1. X 上の前層 \mathcal{F} に対し、 $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ が導くすべての茎 (stalk) の間の射 $\nu_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ は同型である。

証明. x を含む任意の認容開集合 $U \subset X$ および U の任意の認容被覆 $\{U_i\}$ に対し、 $x \in U_i$ なる i を一つ選び、 $K_U(\{U_i\}) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ を α と表す。これは i の取り方に依らない。このような α 達によって、 $\beta_U : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ が導かれる。 β_U 達によって導かれる $\mathcal{F}_x^+ \rightarrow \mathcal{F}_x$ は ν_x の逆射である。□

順像と逆像

定義 B.4.2 (順像と逆像). $f : X \rightarrow Y$ を G-位相空間の間の連続写像とする。前層の順像 $f_p : \mathbf{PSh}(X; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(Y; \mathcal{C})$ および逆像 $f^p : \mathbf{PSh}(Y; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(X; \mathcal{C})$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} f_p \mathcal{F}(U) &= \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \\ f^p \mathcal{F}(U) &= \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V) \end{aligned}$$

層の順像 $f_* : \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(Y; \mathcal{C})$ は、層 $f_* \mathcal{F}$ を前層 $f_p \mathcal{F}$ の層化として定義する。層の逆像 $f^* : \mathbf{Sh}(Y; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C})$ は、層 $f^* \mathcal{F}$ を前層 $f^p \mathcal{F}$ の層化として定義する。

注意 B.4.3. \mathcal{F} が層ならば、前層 $f_p\mathcal{F}$ も層なので、 $f_p\mathcal{F} \cong f_*\mathcal{F}$ である。

順像と逆像は随伴を定める。

命題 B.4.4. $f : X \rightarrow Y$ を G -位相空間の間の連続写像とする。この時、随伴 $f^p \dashv f_p$ および $f^* \dashv f_*$ が存在する。

証明. Y 上の前層の射 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow f_p\mathcal{G}$ が存在したとする。 Y 上の各認容開集合 V に対する ϕ の要素は $\phi_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(f^{-1}(V))$ である。 X 上の各認容開集合 U および、 Y 上の各認容開集合 V で、 $f(U) \subset V$ を満たすものに対し、

$$\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\phi_V} \mathcal{G}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

なる合成が存在する。これらは射 $\hat{\phi}_U : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ を導く。 $\hat{\phi}_U$ の集まりは射

$\hat{\phi} : f^p\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を定める。逆に射 $\hat{\phi} : f^p\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が存在すれば、構成を逆にたどって射 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow f_p\mathcal{G}$ が作れる。よって随伴 $f^p \dashv f_p$ が存在する。随伴 $f^* \dashv f_*$ の存在は層化の普遍性から従う。□

上記の随伴より、逆像関手は任意の余極限を保つ。さらに、逆像関手は有限極限も保つ。

命題 B.4.5. $f : X \rightarrow Y$ を G -位相空間の間の連続写像とする。逆像関手 f^p および f^* は完全関手である。

証明. 右完全であることは明らか。左完全であることを示せばよい。 f^p はフィルター余極限によって定義されていたので、これは左完全である。よって f^p は完全である。 f^p および層化関手が完全であることから、 f^* も完全である。□

また、逆像は層化を保つ。

命題 B.4.6. $f : X \rightarrow Y$ を G -位相空間の間の連続写像とする。 Y 上の前層 \mathcal{F} に対し、 $f^p\mathcal{F}$ の層化は \mathcal{F} の層化の f^* による像と同型である。

証明. 下図の二通りの合成は、どちらも $f_p \cong f_*$ の左随伴である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PSh}(Y; \mathcal{C}) & \xrightarrow{f^p} & \mathbf{PSh}(X; \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Sh}(Y; \mathcal{C}) & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C}) \end{array}$$

よってこれらは同型である。□

茎と摩天楼層

一点集合 $\mathbf{1}$ に通常の位相を入れる。G-位相空間 X 上の各点 x は連続写像 $x : \mathbf{1} \rightarrow X$ と同一視できる。ここで、 $\mathbf{Sh}(\mathbf{1}; \mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$ であり、 $\mathbf{PSh}(\mathbf{1}; \mathcal{C}) \cong (\mathcal{C}/\mathcal{C})$ である。((\mathcal{C}/\mathcal{C}) はコンマ圏。) この同一視の下で、 X 上の層 \mathcal{F} の点 $x \in X$ における茎は $x^*\mathcal{F}$ と書ける。

定義 B.4.7. 各 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、一点集合 $\mathbf{1}$ 上の層 C の $x : \mathbf{1} \rightarrow X$ による順像 x_*C を、 x における摩天楼層 (*skyscraper sheaf*) という。

B.4.2 十分多くの点を持つ場合

トポス論から次の定義を用意する。

定義 B.4.8. G-位相空間 X が圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとは、 \mathcal{C} に値を持つ X 上の層の間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて同型ならば、 f も同型となることを言う。

ここでは X が \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つ場合について考察する。特に断らない限り、層は \mathcal{C} に値を持つとする。

命題 B.4.9. G-位相空間 X が圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとする。 X 上の層の間の二つの射 $f, g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f, g が導く各茎の間で $f_x = g_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ ならば、 $f = g$ である。

証明. 次のような差核図式をとる。

$$\mathcal{H} \xrightarrow{h} \mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} \mathcal{G}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、次の差核図式が導かれる。

$$\mathcal{H}_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{F}_x \begin{array}{c} \xrightarrow{f_x} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g_x} \end{array} \mathcal{G}_x$$

$f_x = g_x$ より、 h_x は同型である。よって、 h は同型である。よって、 $f = g$ である。 \square

命題 B.4.10. G-位相空間 X が圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとする。 X 上の層の間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間で $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ が単射 (*resp.* 全射) ならば、 f も単射 (*resp.* 全射) である。

証明. 全ての f_x が単射であると仮定する。 $f \circ g = f \circ h$ とする。各点 $x \in X$ で茎をとると、 $f_x \circ g_x = f_x \circ h_x$ である。 f_x は単射だから、 $g_x = h_x$ である。よって $g = h$ である。以上より f は単射である。全射についても同様である。 \square

命題 B.4.11. G -位相空間 X が圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとする。 X 上の層の錐 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^i$ について、図式 \mathcal{F}^i が有限で、各茎の錐 $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^i$ が極限錐ならば、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^i$ は有限極限錐である。

証明. 図式 \mathcal{F}^i の極限 \mathcal{F}' をとる。この時、ただ一つの射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ が導かれる。層の圏の極限は前層の圏の極限と一致するので、すなわち各点で \mathcal{C} 上の極限と一致する。 \mathcal{C} 上では有限極限とフィルター余極限は交換するので、各茎 \mathcal{F}'_x は図式 \mathcal{F}_x^i の極限である。よって、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ が茎に導く射は同型である。よって $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^i$ は同型である。 \square

B.4.3 位相空間との比較

G -位相空間には付随する位相空間が存在する。

命題 B.4.12. (X, τ, \mathcal{T}) を G -位相空間とし、 $\hat{X} = \bigcup \tau$ と置く。集合 \hat{X} 上に τ を開基とする位相構造がただ一つ存在する。

証明. G -位相の定義より、 $U, V \in \tau$ ならば $U \cap V \in \tau$ である。集合 \hat{X} の定義より $\bigcup \tau = X$ である。よって、 τ を開基とする X 上の位相がただ一つ存在する。 \square

包含関係 $\hat{X} \subset X$ は連続写像 $\mu_X : \hat{X} \rightarrow X$ を導く。 μ_X が導く随伴 $\mu_X^* \dashv (\mu_X)_* : \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\hat{X}; \mathcal{C})$ について考察する。

命題 B.4.13. G -位相空間 X に対し、次の仮定 (\star) を満たすとする。

- (\star) 任意の認容開集合 U と、 U を集合論的に被覆する認容開集合族 $\{U_i\}_i$ に対し、 $\{U_i\}_i$ を細分する認容被覆が存在する。

このとき、 $\mu_X^* \dashv (\mu_X)_* : \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\hat{X}; \mathcal{C})$ は圏同値である。

証明. 仮定 (\star) より、開基 τ 上の層の圏は G -位相空間 X 上の層の圏と圏同値である。開基 τ 上の層の圏は位相空間 \hat{X} 上の層の圏と圏同値である。よって、 $\mu_X^* \dashv (\mu_X)_* : \mathbf{Sh}(X; \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\hat{X}; \mathcal{C})$ は圏同値である。 \square

茎に関しては次が言える。

命題 B.4.14. $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は G -位相空間 X 上の層の間の射とする。 $\mu_X^* \dashv (\mu_X)_*$ が圏同値ならば、次は同値である。

- f は *stalkwise* に同型である。
- $\mu_X^*(f)$ は *stalkwise* に同型である。

特に、次は同値である。

- G -位相空間 X は圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つ。

- 位相空間 \widehat{X} は圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つ。

証明. 点 $x \in X$ が $x \notin \widehat{X}$ ならば、G-位相空間 X 上の任意の層 \mathcal{H} に対し茎の同型 $\mathcal{H}_x \cong \emptyset$ が成り立つ。よって、常に f_x は同型である。 $x \in \widehat{X}$ ならば、次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \xrightarrow{\mu_X} & X \\ \widehat{x} \uparrow & \nearrow x & \\ \mathbf{1} & & \end{array}$$

ただし、 $x : \mathbf{1} \rightarrow X$ および $\widehat{x} : \mathbf{1} \rightarrow \widehat{X}$ はそれぞれ点 x に値を持つ定値写像である。 $\mu_X^* \dashv (\mu_X)_*$ が圏同値であることから、 $f_x (= x^*(f))$ が同型であることと $\mu_X^*(f)_x (= \widehat{x}^*(\mu_X^*(f)))$ が同型であることは同値である。 \square

B.5 位相空間上の層

B.5.1 位相空間上の層

圏 \mathcal{C} は完備かつ余完備で、フィルター余極限と有限極限が交換し、IPC 性質を満たすとする。 X を位相空間とする。 \mathcal{C} に値を持つ X 上の層について考察する。

X 上の前層 \mathcal{F} に対し、 $\mathcal{F}^\# = \prod_{x \in X} x_* \mathcal{F}_x$ とする。この時、自然な射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ が存在する。

命題 B.5.1. \mathcal{F} が層ならば、自然な射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ は正則な単射 (regular monomorphism) である。すなわち、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ はある図式の差核として書ける。

証明. 各開集合 $U \subset X$ に対し、 $\tau_U : U \rightarrow X$ は埋め込み写像とする。 $\mathcal{F}_U = (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F}$ とする。具体的には $\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(U \cap V)$ で定義されている。

各開集合 $U \subset X$ と任意の開被覆 $\{U_i\}$ に対し、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}_U \rightarrow \prod \mathcal{F}_{U_i} \rightrightarrows \prod \mathcal{F}_{U_i \cap U_j}$$

$\{U_i\}$ について順極限をとれば、 $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^\#(U)$ がある図式の差核として導かれる。 \mathcal{C} は完備かつ余完備なので、 $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^\#(U)$ は具体的に余核対の差核として書ける。よって、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ は前層の圏の中で余核対の差核として書ける。層化関手は完全なので、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ は層の圏の中で余核対の差核として書ける。 \square

系 B.5.2. X 上の層 \mathcal{F} および前層 \mathcal{G} とその間の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 f が導く各茎の間の射 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて単射ならば、 f も単射である。また、 \mathcal{G} が層で各 $f_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ がすべて正則な単射ならば、 f も正則な単射である。

証明. 次の図式より明らか、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^\# \\ \downarrow f & & \downarrow \prod f_x \\ \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^\# \end{array}$$

□

B.5.2 十分多くの点を持つ場合

ここでは位相空間 X が \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つ場合について考察する。特に断らない限り、層は \mathcal{C} に値を持つとする。

命題 B.5.3. 位相空間 X は圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとする。 \mathcal{F} を X 上の層とする。また、各閉部分集合 $Z \subset X$ の包含写像を $\tau_Z : Z \hookrightarrow X$ と表す。このとき、 $\{Z_i\}$ を X の局所有限閉被覆とすると、次の図式は差核である。

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(Z_i) \rightrightarrows \prod \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}(Z_i \cap Z_j)$$

証明. 次の図式が差核であることを示す。

$$\mathcal{F} \rightarrow \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F} \rightrightarrows \prod (\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F}$$

各点 $x \in X$ で茎をとると、

$$\mathcal{F}_x \rightarrow \prod ((\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F})_x \rightrightarrows \prod ((\tau_{Z_i \cap Z_j})_* \tau_{Z_i \cap Z_j}^* \mathcal{F})_x$$

ここで、順極限と積の交換 $\lim_{U \ni x} \prod (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U) \cong \prod \lim_{U \ni x} (\tau_{Z_i})_* \tau_{Z_i}^* \mathcal{F}(U)$ を見るためには積が有限でなければならないが、 $\{Z_i\}$ が局所有限であることより、積が有限であるとしてよい。

任意の閉部分集合 $Z \subset X$ に対して、

$$((\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F})_x = \begin{cases} * & (x \notin Z) \\ \mathcal{F}_x & (x \in Z) \end{cases}$$

である。よって、上の図式は下のよう書ける。

$$\mathcal{F}_x \rightarrow \prod_{Z_i \ni x} \mathcal{F}_x \rightrightarrows \prod_{Z_i \cap Z_j \ni x} \mathcal{F}_x$$

これが差核であることは簡単にわかる。よって各茎が差核だから、始めの図式は差核である。 □

命題 B.5.4. X は圏 \mathcal{C} に対して十分多くの点を持つとする。 X を正則空間、 $Z \subset X$ を閉集合とし、 $\tau_Z: Z \hookrightarrow X$ は包含写像とする。 X 上の層 \mathcal{F} に対し、 $\tau_Z^p \mathcal{F} = \tau_Z^* \mathcal{F}$ である。

証明. まずは $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset Z}} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ が同型であることを示す。各点で茎をとれば、 $x \in Z$ の時は $\mathcal{F}_x \xrightarrow{=} \mathcal{F}_x$ となり、 $x \notin Z$ の時は X が正則であることより $* \rightarrow *$ となる。これらはすべて同型である。

$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset Z}} (\tau_U)_* \tau_U^* \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ なる合成が同型だから、 $(\tau_Z)_* \tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow (\tau_Z)_* \tau_Z^* \mathcal{F}$ は分裂全射である。これが単射であればよい。

Z の任意の開集合 V 、開被覆 $\{V_i \subset V\}$ および $U_i \supset V_i$ なる開集合族 $U_i \subset X$ に対し、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(\bigcup U_i) & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(\{V_i \subset V\}) & \longrightarrow & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) & \rightrightarrows & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

ここで、上列は差核である。 $U_i \supset V_i$ について順極限をとれば、IPC 性質およびフィルター余極限と差核が交換することから、次の図式が導かれる。

$$\begin{array}{ccc} \tau_Z^p \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\text{正則な単射}} & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \\ \text{正則な単射} \downarrow & & \parallel \\ K(\{V_i \subset V\}) & \xrightarrow[\text{正則な単射}]{} & \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i) \rightrightarrows \prod \tau_Z^p \mathcal{F}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

今、図式は余完備な圏で考えているので、正則な単射は余核対 (cokernel pair) の差核である。 $\{V_i \subset Z\}$ について順極限をとれば、フィルター余極限と差核が交換することから、 $\tau_Z^p \mathcal{F}(V) \rightarrow \tau_Z^* \mathcal{F}(V)$ は正則な単射である。よって、 $\tau_Z^p \mathcal{F} \rightarrow \tau_Z^* \mathcal{F}$ は正則な単射である。 \square

付録C モデル圏とホモトピー

C.1 準備

まずモデル圏の定義に必要なリフト性質と弱分解系について定義する。次に、余束生成モデル圏の定義に必要な相対セル複体を定義する。小対象引数は余束生成モデル圏の特徴づけにおいて重要である。射の集合が小対象引数を許容するとき、標準的な弱分解系が存在することを述べる。

C.1.1 リフト性質と弱分解系

ここではモデル圏を定義するために必要なリフト性質と弱分解系についての一般論を述べる。モデル圏の束と余束はリフト性質によって特徴づけられる。モデル圏の公理ではさらに、束と非輪状余束 (resp. 非輪状束と余束) が弱分解系を作ること要求する。

リフト性質

一般の圏上で、次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

このような可換図式を射 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ で表す。次の可換図式を可換にするような射 $\gamma : B \rightarrow X$ を、可換図式 (α, β) のリフトと呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow \gamma & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

さらに次の記法を導入しよう。

定義 C.1.1 (Joyal の記法). L と R は射のクラスとする。任意の $f \in L$ と任意の $g \in R$ および任意の可換図式 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ に対し、 (α, β) のリフトが存在するとき、 $L \pitchfork R$ と書く。特に、 $L = \{f\}$ (resp. $R = \{g\}$) の時、 $f \pitchfork R$ (resp. $L \pitchfork g$) と書く。さらに $L = \{f\}$ かつ $R = \{g\}$ の時、 $f \pitchfork g$ と書く。

注意 C.1.2. 二つの射 $f: A \rightarrow B$ と $g: X \rightarrow Y$ に対し、次の写像が定まる。

$$g_* \times f^* : \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(B, Y) \times_{\text{Hom}(A, Y)} \text{Hom}(A, X)$$

$f \pitchfork g$ であることは、上記の写像 $g_* \times f^*$ が全射であることと同値である。

このような性質をリフト性質と呼ぶ。

定義 C.1.3. L と R は射のクラスとする。 L が R に対して左リフト性質を持つとは、 $L \pitchfork R$ が成り立つことである。この時、 R が L に対して右リフト性質を持つとも言う。特に、 $L = \{f\}$ (resp. $R = \{g\}$) の時、 f (resp. L) が R (resp. g) に対して左リフト性質を持つと言う。以下、同様である。

例 C.1.4. 集合と写像の圏 \mathbf{Set} 上で、 $\text{Mono} = \{\text{単射}\}$, $\text{Epi} = \{\text{全射}\}$ とする。このとき $\text{Mono} \pitchfork \text{Epi}$ かつ $\text{Epi} \pitchfork \text{Mono}$ である。

また、リフト性質を持つ射全体のクラスを表す記号を用意しておく。

定義 C.1.5. I は射のクラスとする。 I に対して右 (resp. 左) リフト性質を持つ射全体のクラスを $\text{rlp}(I)$ (resp. $\text{llp}(I)$) で表す。

左リフト性質と右リフト性質は互いに双対の性質である。

命題 C.1.6. \mathcal{C} を圏とし、 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ は \mathcal{C} 上の可換図式とする。この時、 (α, β) のリフト γ は、双対圏 \mathcal{C}^{op} 上の可換図式 $(\beta^{op}, \alpha^{op})$ のリフト γ^{op} と一対一に対応する。特に、射のクラス L が射のクラス R に対して左リフト性質を持つことは、 L^{op} が R^{op} に対して右リフト性質を持つことと同値である。

リフト性質はいくつかの操作で閉じている。(また、セル複体をとる操作でも閉じているが、それは次の節に回す。)

命題 C.1.7. f を射、 R を射のクラスとする。 $f \pitchfork R$ ならば次が成り立つ。

- 次の図式が引き戻しならば、 $f' \pitchfork R$ である。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \end{array}$$

- f' が f のレトラクト (i.e. 次の図式が可換) ならば、 $f' \pitchfork R$ である。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ f' \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f' \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

証明. 明らか。 □

随伴について次の性質が成り立つ。

命題 C.1.8. \mathcal{C} と \mathcal{D} は圏とし、 L は圏 \mathcal{C} 上の射のクラス、 R は圏 \mathcal{D} 上の射のクラスとする。随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、次は同値である。

- $F(L) \dashv R$ である。
- $L \dashv G(R)$ である。

証明. 任意の $(f : A \rightarrow B) \in L$ と $(g : X \rightarrow Y) \in R$ に対し、次の図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(B), X) \xrightarrow{g_* \times F(f)^*} \mathcal{D}(F(B), Y) \times_{\mathcal{D}(F(A), Y)} \mathcal{D}(F(A), X) & & \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{C}(B, G(X)) \xrightarrow{G(g)_* \times f^*} \mathcal{C}(B, G(Y)) \times_{\mathcal{C}(A, G(Y))} \mathcal{C}(A, G(X)) & & \end{array}$$

よって、

$$\begin{aligned} F(f) \dashv g &\Leftrightarrow g_* \times F(f)^* \text{ は全射} \\ &\Leftrightarrow G(g)_* \times f^* \text{ は全射} \\ &\Leftrightarrow f \dashv G(g) \end{aligned}$$

となる。よって $F(L) \dashv R \Leftrightarrow L \dashv G(R)$ である。 □

弱分解系

弱分解系を定義する。

定義 C.1.9 (弱分解系). \mathcal{C} を圏とする。 \mathcal{C} 上の弱分解系 (L, R) とは、射のクラス L と R の組であって、次を満たすもののことである。

- \mathcal{C} 上の任意の射 f に対し、 f の分解 $f = r_f \circ l_f$ で $(r_f, l_f) \in R \times L$ なるものが存在する。
- $L \dashv R$ である。
- $f \dashv R \Rightarrow f \in L$ である。
- $L \dashv g \Rightarrow g \in R$ である。

\mathcal{C} 上の関手的弱分解系 (L, R) とは、弱分解系 (L, R) であって、上記の対応 $f \mapsto (r_f, l_f) \in R \times L$ が関手的にとれることである。

注意 C.1.10. (L, R) が弱分解系であることは、次を満たすことと同値である。

- \mathcal{C} 上の任意の射 f に対し、 f の分解 $f = r_f \circ l_f$ で $(r_f, l_f) \in R \times L$ なるものが存在する。
- $L = \text{llp}(R)$ である。
- $\text{rlp}(L) = R$ である。

例 C.1.11. 集合と写像の圏 \mathbf{Set} 上で、 $(\text{Mono}, \text{Epi})$ と $(\text{Epi}, \text{Mono})$ はどちらも関手的弱分解系である。

C.1.2 超限合成と相対セル複体

対象 X から出発して、与えられた射のクラスを“貼り付けて”いくことで、射のクラスの相対セル複体 $X \rightarrow Y$ を定義する。ここで、射 $A \rightarrow B$ を“貼り付ける”とは、射 $X \rightarrow X \cup_A B$ を得る操作のことである。相対セル複体を得るためには、このような操作を無限に繰り返す必要がある。そこで、まずは射の無限列に対し射の合成を定義する。これを超限合成と呼ぶ。

超限合成

定義 C.1.12 (超限合成). \mathcal{C} は余完備な圏とし、 λ は序数とする。

- \mathcal{C} 上の λ -合成可能列とは関手 $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ で、 $\gamma = \beta + 1$ なる β を持たない任意の $\gamma < \lambda$ に対し、次の標準的な射が同型となるもののことである。

$$\varinjlim_{\beta < \gamma} X_\beta \rightarrow X_\gamma$$

下記のような λ -合成可能列を (X, f) または f または (f_β) と明示的に書くことにする。

$$X_0 \xrightarrow{f_0} \dots \xrightarrow{f_{\beta-1}} X_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_{\beta+1} \xrightarrow{f_{\beta+1}} \dots$$

- (X, f) を λ -合成可能列とする。 $X_\lambda = \varinjlim X$ と置く。 f の超限合成 (または単に合成) とは、標準的な射 $f^\circ : X_0 \rightarrow X_\lambda$ のことである。

例 C.1.13. 恒等射 id は 1-合成可能列の合成である。

定義から明らかに、フィルター余極限を保つ関手は合成可能対を保つ。また、左リフト性質は超限合成について閉じている。

命題 C.1.14. (X, f) は λ -合成可能列とし、 R は射のクラスとする。 f の超限合成を f° とする。任意の $\beta < \lambda$ に対して $f_\beta \circ R$ ならば、 $f^\circ \circ R$ である。

証明. 任意の $g \in R$ に対し、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & g \\
 & & & & & & \longrightarrow \\
 A & \xrightarrow{\quad} & & & & & B \\
 \uparrow & & \searrow & & & & \uparrow \\
 X_0 & \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{\beta-1}} & X_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & X_{\beta+1} & \xrightarrow{f_{\beta+1}} \cdots \longrightarrow & \lim_{\rightarrow} X
 \end{array}$$

$f_0 \circ g$ よりリフト $X_1 \rightarrow A$ が存在する。リフト $X_\beta \rightarrow A$ が任意の $\beta < \gamma$ で存在したとする。 $\gamma = \beta + 1$ なる β が存在すれば、 $f_\beta \circ R$ よりリフト $X_\gamma \rightarrow A$ が存在する。そのような β が存在しなければ、 X_γ が余極限錐であることからリフト $X_\gamma \rightarrow A$ が存在する。よって、超限帰納法により錐 $(X, f) \rightarrow A$ がとれる。よってリフト $X_\lambda \rightarrow A$ が存在するので、 $f^\circ \circ R$ である。 \square

相対セル複体

相対セル複体を定義する。

定義 C.1.15 (相対セル複体). \mathcal{C} は余完備な圏とし、 I は射のクラスとする。 I -相対セル複体とは、 I に属する射の押し出しの λ -合成可能列の超限合成と同型である射のことである。 *i.e.* 射 h が I -相対セル複体であるとは、ある λ -列 f で次を満たすものが存在し、 f の超限合成が h と同型になるものことである。

任意の $\beta < \lambda$ に対して $i_\beta \in I$ と次の押し出し図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{f_\beta} & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \cdot & \xrightarrow{i_\beta} & \cdot
 \end{array}$$

I -相対セル複体全体のクラスを $\text{cell}(I)$ と書く。

$\text{cell}(I)$ は \mathcal{C} の部分圏である。これは次の性質から直ちにわかる。

命題 C.1.16. I -相対セル複体の超限合成は I -相対セル複体である。特に、 $\text{cell}(I)$ は \mathcal{C} の部分圏である。

証明. 明らか。 \square

また、セルをまとめて貼り合わせることもできる。

命題 C.1.17. \mathcal{C} は余完備な圏とし、 I は射のクラスとする。射のクラス J を $\{\coprod_{\lambda} i_\lambda \mid i_\lambda \in I^{(\forall \lambda)}\}$ として定める。このとき、 $\text{cell}(I) = \text{cell}(J)$ である。

証明. $\text{cell}(I) \subset \text{cell}(J)$ は明らか。 $\text{cell}(I) \supset \text{cell}(J)$ を示す。

次の押し出し図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_\lambda & \xrightarrow{\coprod i_\lambda} & \coprod B_\lambda \end{array}$$

J -相対セル複体は上の f のような射の超限合成である。よって、上のような f が常に I -相対セル複体であることを示せば、 J -相対セル複体は I -相対セル複体であることが示される。

上の図式が押し出しであると仮定し、 $f \in \text{cell}(I)$ であることを示す。添え字 λ の集合を Λ とする。 Λ を基数と同一視して、整列集合とみなす。

Λ が有限の場合

$\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ としてよい。射の列 $X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n$ を次の図式が押し出しになるものとして定義する。

$$\begin{array}{ccc} X_{k-1} & \xrightarrow{f_k} & X_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_k & \xrightarrow{i_k} & B_k \end{array}$$

$f' = f_n \circ \dots \circ f_1$ とする。このとき、次の図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_\lambda & \xrightarrow{\coprod i_\lambda} & \coprod B_\lambda \end{array}$$

これが押し出し図式であることは直接確かめられる。

Λ が無限の場合

Λ -合成可能列 (Z, g) を次のように定める。 $Z_0 = X$ とする。 Z_β が定義できていた時、 $g_\beta : Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$ を次の図式が押し出しになるように定める。

$$\begin{array}{ccc} Z_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & Z_{\beta+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_\beta & \xrightarrow{i_\beta} & B_\beta \end{array}$$

$\beta+1 = \gamma$ なる β が存在せず、任意の $\beta < \gamma$ に対し Z_β が定義できていた時、 $Z_\gamma = \lim_{\beta < \gamma} Z_\beta$ とする。このように Λ -合成可能列 (Z, g) を構成すると、 g の超限合成 g° は I -相対セル複

体である。さらに、次の図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g^\circ} & X_\Lambda \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod A_\lambda & \xrightarrow{\coprod i_\lambda} & \coprod B_\lambda \end{array}$$

これが押し出し図式であることは直接確かめられる。 □

相対 CW 複体は相対セル複体の例の一つである。

例 C.1.18. 位相空間の圏 **Top** を考える相対 CW 複体とは、 \aleph_0 -列 (X, f) で次を満たすものの超限合成に同型な連続写像のことである。

任意の自然数 n に対し、次の押し出し図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod S^{n-1} & \longrightarrow & \coprod D^n \end{array}$$

集合 $I_{\mathbf{Top}}$ を $\{S^{n-1} \hookrightarrow D^n\}$ として定義する。相対 CW 複体は $I_{\mathbf{Top}}$ -相対セル複体である。すなわち、 $I_{\mathbf{Top}}$ -相対セル複体とは相対 CW 複体の一般化である。

C.1.3 小対象指数

対象が小さいとは、コンパクト性のようなもの満たすことを言う。小対象指数は弱分解系の存在を保証する。(cf. [11])

小対象

定義 C.1.19 (小対象). \mathcal{C} は余完備圏とし、 \mathcal{D} は \mathcal{C} の部分圏とする。

- κ は基数とする。対象 W が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小であるとは、任意の正則基数 $\lambda \geq \kappa$ および \mathcal{D} 上の任意の λ -合成可能列 X に対し、次の写像が全単射になることである。

$$\varinjlim_{\beta} \mathcal{C}(W, X_\beta) \cong \mathcal{C}(W, \varinjlim_{\beta} X_\beta)$$

(ただし、 $\varinjlim X$ は \mathcal{C} 上の余極限とする。)

- 特に $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ の時、 W は単に κ -小であると言う。
- 対象 W が \mathcal{D} に対して相対的に小であるとは、ある基数 κ に対して対象 W が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小であることを言う。

- 特に $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ の時、 W は単に小であると言う。

例 C.1.20. \mathcal{U} は小さい圏とする。任意の対象 $u \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ に対し、前層 $\mathcal{U}(-, u) \in \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ は \aleph_0 -小である。実際、米田の補題により次の全単射が成り立つ。

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} (X_{\beta}[u]) \\ &\cong (\varinjlim_{\beta} X_{\beta})[u] \\ &\cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}). \end{aligned}$$

例 C.1.21. \mathcal{U} は任意の被覆が有限細分を持つ小さい景とする。この時、 \mathcal{U} 上の層 \mathcal{F} が前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ 上で κ -小ならば、 \mathcal{F} は層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})$ 上で κ -小である。実際、次の同型が成り立つ。

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{F}, X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{F}, X_{\beta}) \\ &\cong \mathbf{PSh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}) \\ &\cong \mathbf{Sh}(\mathcal{U}; \mathbf{Set})(\mathcal{U}(-, u), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}) \end{aligned}$$

ここで、任意の被覆が有限細分を持つことから、層としての余極限 $\varinjlim_{\beta} X_{\beta}$ は前層としての余極限に一致していることに注意する。

小対象は有限余極限について閉じている。

命題 C.1.22. $W : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を有限関式とする。(i.e. W は有限圏 \mathcal{D} からの関手とする。) 各 W_p が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小ならば、余極限 $\varinjlim_p W_p$ も \mathcal{D} に対して相対的に κ -小である。

証明.

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathcal{C}(\varinjlim_p W_p, X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} \varprojlim_p \mathcal{C}(W_p, X_{\beta}) \\ &\cong \varprojlim_p \varinjlim_{\beta} \mathcal{C}(W_p, X_{\beta}) \\ &\cong \varprojlim_p \mathcal{C}(W_p, \varinjlim_{\beta} X_{\beta}) \\ &\cong \mathcal{C}(\varprojlim_p W_p, \varinjlim_{\beta} X_{\beta}). \end{aligned}$$

□

系 C.1.23. $W : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を有限関式とする。各 W_p が \mathcal{D} に対して相対的に小ならば、余極限 $\varinjlim_p W_p$ も \mathcal{D} に対して相対的に小である。

証明. 各添え字 $p \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、ある基数 κ_p を用いて対象 W_p は \mathcal{D} に対して相対的に κ_p -小であるとしてよい。 κ は κ_p のうち最大の基数とする。各 W_p は \mathcal{D} に対して相対的に κ -小である。命題 C.1.22 より、余極限 $\varinjlim_p W_p$ も \mathcal{D} に対して相対的に κ -小である。 \square

注意 C.1.24. 実は、上記の系は \mathcal{D} が有限でなくても成り立つ。(cf. [11])

随伴 $F \dashv G$ に対し、 G がフィルター余極限を保つならば、 F は小対象を保つ。

命題 C.1.25. $F \dashv G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ は随伴とし、 \mathcal{D} は圏 \mathcal{C} の部分圏とする。関手 G はフィルター余極限を保つと仮定する。この時、対象 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が \mathcal{D} に対して相対的に κ -小ならば、対象 $F(c) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ は $G^{-1}(\mathcal{D})$ に対して相対的に κ -小である。

証明.

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\beta} \mathcal{C}'(F(c), X_{\beta}) &\cong \varinjlim_{\beta} \mathcal{C}(c, G(X_{\beta})) \\ &\cong \mathcal{C}(c, \varinjlim_{\beta} G(X_{\beta})) \\ &\cong \mathcal{C}(c, G(\varinjlim_{\beta} X_{\beta})) \\ &\cong \mathcal{C}'(F(c), \varinjlim_{\beta} X_{\beta}). \end{aligned}$$

\square

小対象引数

定義 C.1.26 (小対象引数). \mathcal{C} は余完備圏とし、 I は \mathcal{C} の射の集合とする。

- κ は基数とする。 I が κ -小対象引数を許容するとは、 I に含まれる全ての射 $x \rightarrow y$ に対し、始域 x が部分圏 $\text{cell}(I)$ に対して相対的に κ -小であることを言う。
- I が小対象引数を許容するとは、ある基数 κ に対して I が κ -小対象引数を許容することを言う。

命題 C.1.27 (D. M. Kan). \mathcal{C} は余完備圏とし、 I は \mathcal{C} の射の集合とする。 I が小対象引数を許容するならば、 \mathcal{C} 上の任意の射 f に対し、 $p_f \in \text{rlp}(I)$ かつ $i_f \in \text{cell}(I)$ を満たす(関手的)分解 $f = p_f \circ i_f$ が存在する。

証明. [11] を参照。 \square

これは次のように改良できる。

命題 C.1.28. \mathcal{C} は余完備圏とし、 I は \mathcal{C} の射の集合とする。 $\text{Cof}(I) = \{I\text{-相対セル複体のレトラクト}\}$ とする。 I が小対象引数を許容するならば、 $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ は(関手的)弱分解系である。

証明. 命題 C.1.27 に加え、明らかでないのは次の性質である。これを示す。

- $f \in \text{rlp}(I) \Rightarrow f \in \text{Cof}(I)$.

$f \in \text{rlp}(I)$ と仮定する。 $p_f \in \text{rlp}(I)$ かつ $i_f \in \text{cell}(I)$ を満たす分解 $f = p_f \circ i_f$ をとる。次の図式を可換にする射 h が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{i_f} & \cdot \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p_f \\
 \cdot & \xrightarrow{id} & \cdot
 \end{array}$$

よって、 f は I -相対セル複体 i_f のレトラクトである。 □

C.2 モデル圏

C.2.1 モデル圏

定義 C.2.1 (モデル圏 [12, 11, 22]). \mathcal{C} は完備かつ余完備な圏とする。 \mathcal{C} 上のモデル構造とは、三つ組 $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ で次を満たすものを言う。

(2-out-of-3)

三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W に含まれるならば、残りの一つも W に含まれる。

(factorization)

$(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ は \mathcal{C} 上の (関手的) 弱分解系である。 (cf. Definition ??)

W (resp. Fib , Cof) に属する射を弱同値 (*weak equivalence*) (resp. 束 (*fibration*), 余束 (*cofibration*)).

モデル圏とはモデル構造を備えた完備かつ余完備な圏のことを言う。

注意 C.2.2. 弱分解系 $(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ が関手的であることを要求するかどうかは文献による。

注意 C.2.3. W と Fib と Cof は全て \mathcal{C} の部分圏である。

モデル圏は次の特徴づけを持つ。(これをモデル圏の定義として採用する文献が多い。)

命題 C.2.4. \mathcal{C} は完備かつ余完備な圏とする。射のクラスによる三つ組 $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ がモデル構造であるための必要十分条件は、次の条件を満たすことである。

1. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W に含まれるならば、残りの一つも W に含まれる。
2. W , Fib , Cof はそれぞれレトラクトについて閉じている。

3. $\text{Cof} \cap W \pitchfork \text{Fib}$ かつ $\text{Cof} \pitchfork \text{Fib} \cap W$ である。
4. 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f = p'_f \circ i'_f$ なる二つの (関手的) 分解で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in \text{Cof} \cap W$, $p'_f \in \text{Fib} \cap W$, $i'_f \in \text{Cof}$ となるものが存在する。

証明. 必要性は明らか。十分性を示す。次の四つを示せばよい。

- $f \pitchfork \text{Fib} \Rightarrow f \in \text{Cof} \cap W$ である。
- $f \pitchfork \text{Fib} \cap W \Rightarrow f \in \text{Cof}$ である。
- $\text{Cof} \cap W \pitchfork g \Rightarrow g \in \text{Fib}$ である。
- $\text{Cof} \pitchfork g \Rightarrow g \in \text{Fib} \cap W$ である。

証明は全く同様なので、一つ目のみ示す。 $f \pitchfork \text{Fib}$ と仮定する。 $f = p_f \circ i_f$ なる分解で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in \text{Cof} \cap W$ となるものをとる。次の図式がリフト h を持つ。

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{i_f} & \cdot \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p_f \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot
 \end{array}$$

これは f が i_f のレトラクトであることを意味する。よって、 $f \in \text{Cof} \cap W$ である。 □

スライス圏はモデル圏の構造を持つ。

命題 C.2.5. \mathcal{C} はモデル圏とし、 \mathcal{C} 上のモデル構造を $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ と表す。 X は \mathcal{C} 上の任意の対象とする。スライス圏 (\mathcal{C}/X) からの忘却関手を $U : (\mathcal{C}/X) \rightarrow \mathcal{C}$ と表す。このとき、三つ組 $(U^{-1}(W), U^{-1}(\text{Fib}), U^{-1}(\text{Cof}))$ はスライス圏 \mathcal{C}/X 上のモデル構造である。同様に、スライス圏 (X/\mathcal{C}) もモデル構造を持つ。

証明. モデル圏の特徴づけ (命題 C.2.4) から明らか。 □

C.2.2 ホモトピー

モデル圏の上ではホモトピー論を展開することができる。まずは基本的な定義をしよう。

定義 C.2.6 (道対象と右ホモトピー). X はモデル圏の対象とする。対角射 $X \rightarrow X \times X$ を分解する列 $X \rightarrow \text{Path}(X) \rightarrow X \times X$ が存在したとする。

- $X \rightarrow \text{Path}(X)$ が弱同値の時、対象 $\text{Path}(X)$ (と上記の分解の組) を X の道対象 (*path object*) と呼ぶ。
- $X \rightarrow \text{Path}(X)$ が弱同値かつ $\text{Path}(X) \rightarrow X \times X$ が束の時、対象 $\text{Path}(X)$ を X の良い道対象 (*good path object*) と呼ぶ。

- $X \rightarrow \text{Path}(X)$ が非輪状余束かつ $\text{Path}(X) \rightarrow X \times X$ が束の時、対象 $\text{Path}(X)$ を X の非常に良い道対象 (*very good path object*) と呼ぶ。

$f, g: X \rightarrow Y$ はモデル圏上の射とする。 f から g への右ホモトピーとは、 X から Y の道対象への射 $H: X \rightarrow \text{Path}(Y)$ で、次の図式を可換にするもののことを言う。

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(Y) & \longrightarrow & Y \times Y \\ H \uparrow & \nearrow f \times g & \\ X & & \end{array}$$

上記の道対象が良い (*resp.* 非常に良い) 道対象であるとき、右ホモトピー H を良い (*resp.* 非常に良い) 右ホモトピーと言う。 f から g への右ホモトピーが存在するとき、 f は g に右ホモトピックであると言い、 $f \stackrel{r}{\simeq} g$ と書く。

例 C.2.7. X を位相空間とし、 $[0, 1]$ は閉区間とする。連続写像の空間 $X^{[0,1]}$ にコンパクト開位相を入れる。各点 $x \in X$ に定値写像 $t \mapsto x$ を対応させる写像 $X \rightarrow X^{[0,1]}$ は弱同値であり、各道 $c: [0, 1] \rightarrow X$ に対し端点 $(c(0), c(1))$ を対応させる写像 $X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$ は Serre 束である。これらの合成は対角射 $X \rightarrow X \times X$ に一致する。すなわち、 $X^{[0,1]}$ は X の良い道対象である。

($\text{Cof}, \text{Fib} \cap W$) が弱分解系だから、任意の対象は非常に良い道対象を持つ。双対的に次が定義できる。

定義 C.2.8 (筒対象と左ホモトピー)。余対角射 $X \amalg X \rightarrow X$ を分解する列 $X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X) \rightarrow X$ が存在したとする。

- $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$ が弱同値の時、対象 $\text{Cyl}(X)$ を X の筒対象 (*cylinder object*) と呼ぶ。
- $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$ が弱同値かつ $X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ が余束の時、対象 $\text{Cyl}(X)$ を X の良い筒対象 (*good cylinder object*) と呼ぶ。
- $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$ が非輪状束かつ $X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ が余束の時、対象 $\text{Cyl}(X)$ を X の非常に良い筒対象 (*very good cylinder object*) と呼ぶ。

$f, g: X \rightarrow Y$ はモデル圏上の射とする。 f から g への左ホモトピーとは、 X の筒対象から Y への射 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ で、次の図式を可換にするもののことを言う。

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{H} & Y \\ \uparrow & \nearrow f \amalg g & \\ X \amalg X & & \end{array}$$

上記の筒対象が良い (*resp.* 非常に良い) 筒対象であるとき、左ホモトピー H を良い (*resp.* 非常に良い) 左ホモトピーと言う。 f から g への左ホモトピーが存在するとき、 f は g に左ホモトピックであると言い、 $f \stackrel{l}{\simeq} g$ と書く。

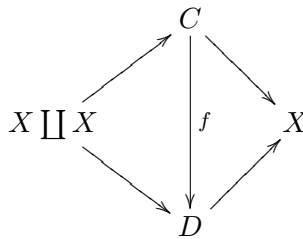
例 C.2.9. X を位相空間とし、 $[0, 1]$ は閉区間とする。積空間 $X \times [0, 1]$ には積位相を入れる。標準的射影 $X \times [0, 1] \rightarrow X$ は弱ホモトピー同値である。 X が CW 複体ならば、二つの写像 $x \mapsto (x, 0)$ と $x \mapsto (x, 1)$ の直和 $X \amalg X \rightarrow X \times [0, 1]$ は Serre 余束である。これらの合成は余対角射 $X \amalg X \rightarrow X$ に一致する。すなわち、 $X \times [0, 1]$ は X の筒対象であり、 X が CW 複体ならば良い筒対象である。

($\text{Cof} \cap W, \text{Fib}$) が弱分解系だから、任意の対象は非常に良い筒対象を持つ。道対象 (resp. 筒対象) を特殊な対象として定義したが、厳密に言えば対角射 (resp. 余対角射) の分解の構造を一つ固定して考える。

筒対象と左ホモトピー

道対象と筒対象は双対概念だから、ここからは筒対象についてを主に論じる。まず、筒対象の圏 $\text{Cyl}(X)$ を定義しよう。

定義 C.2.10. X はモデル圏 \mathcal{C} の対象として、 C と D は X の筒対象とする。筒対象の射 $f: C \rightarrow D$ とは、圏 \mathcal{C} 上の射 $f: C \rightarrow D$ であって、次の図式を可換にするものことである。



余対角射 $X \amalg X \rightarrow X$ の分解の圏はスライス圏として実現できるので、命題 C.2.5 よりこれはモデル圏である。余対角射の分解 a が筒対象であるとは、分解の圏の終対象 $\mathbf{1}$ へのただ一つの射 $a \rightarrow \mathbf{1}$ が弱同値になることである。

全ての筒対象は、次の意味で等価である。

命題 C.2.11. X はモデル圏 \mathcal{C} の対象とする。

1. X の任意の筒対象 D に対し、良い筒対象 C と射 $C \rightarrow D$ が存在する。
2. X の任意の良い筒対象 C に対し、非常に良い筒対象 D と射 $C \rightarrow D$ が存在する。
3. X の任意の良い筒対象 C と任意の非常に良い筒対象 D に対し、射 $C \rightarrow D$ が存在する。(後の命題 C.2.13 から、射 $C \rightarrow D$ はすべて左ホモトピックである。)

証明. 1. は射 $X \amalg X \rightarrow D$ を余束と非輪状束に分解すればよい。

2. は射 $C \rightarrow X$ を余束と非輪状束に分解すればよい。

3. は余束が非輪状束に対し左リフト性質を満たすことから従う。 □

命題 C.2.11 の 1. より直ちに次がわかる。

命題 C.2.12. f が g に左ホモトピックならば、 f から g への良い左ホモトピーが存在する。

非輪状束に対するリフトは左ホモトピックを除いて一意である。

命題 C.2.13. $f : X \rightarrow Y$ はモデル圏上の非輪状束とする。二つの射 $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : B \rightarrow X$ はそれぞれ射 $g_1, g_2 : B \rightarrow Y$ のリフトとする。i.e. $g_i = f \circ \tilde{g}_i (i = 1, 2)$ を満たすとする。 g_1 が g_2 に左ホモトピックならば、 \tilde{g}_1 は \tilde{g}_2 に左ホモトピックである。

証明. g_1 から g_2 への良い左ホモトピー $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow Y$ をとる。 B の良い筒対象 $\text{Cyl}(B)$ を一つとる。次の図式のリフト \tilde{H} が存在する。

$$\begin{array}{ccc} B \amalg B & \xrightarrow{\tilde{g}_1 \amalg \tilde{g}_2} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

H は \tilde{g}_1 から \tilde{g}_2 への左ホモトピーである。よって、 \tilde{g}_1 は \tilde{g}_2 に左ホモトピックである。 \square

左ホモトピックの関係によって同値関係を定めたい。まずは次がわかる。

命題 C.2.14. 左ホモトピックの関係は反射律と対称律を満たす。

証明.

反射律

任意の射 $f : X \rightarrow Y$ をとる。 $id_X : X \rightarrow X$ は弱同値なので、分解 $X \amalg X \rightarrow X \xrightarrow{id_X} X$ は筒対象 $\text{Cyl}(X) = X$ を定める。よって、 f 自身が f から f への左ホモトピーを与える。

対称律

$f : X \rightarrow Y$ から $g : X \rightarrow Y$ への左ホモトピー $H : \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ が存在したとする。左右を入れ替える同型 $\phi : X \amalg X \rightarrow X \amalg X$ が存在することから、 H は g から f への左ホモトピーでもある。 \square

特定の条件では推移律も満たされるが、一般には成り立たない。一般には次のように定義しておく。

定義 C.2.15. モデル圏上の射の同値関係 \sim^l を次のように定める。

$$f \sim^l g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{有限個の射 } f_1, \dots, f_n \text{ が存在し、次を満たす。} \\ f \simeq^l f_1 \simeq^l \dots \simeq^l f_n \simeq^l g \end{cases}$$

同値類の集合を $\pi^l(X, Y) = \text{Hom}(X, Y) / \sim^l$ と置く。

分解が関手的でない場合

モデル圏の任意の射は余束と非輪状束、または非輪状余束と束の合成に分解できる。この分解に関手性を求めるかどうかは文献によるが、この性質を仮定しなくても、他の公理から弱い形の関手性が導かれる。

命題 C.2.16. モデル圏上の次の可換図式は、 i が余束、 q が非輪状束とする。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{i} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{q} & \cdot \end{array}$$

このとき、次の図式を可換にする真ん中の射が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{i} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{q} & \cdot \end{array}$$

さらに、このような射は全て左ホモトピックである。

証明. 射の存在は i が q に対して左リフト性質を持つことから従う。また、命題 C.2.13 からこのようなリフトは全て左ホモトピックである。□

C.2.3 (余) 束対象と (余) 束置換

モデル圏を考える理由の一つは、ホモトピー圏の間の導来関手を計算できることである。モデル圏 \mathcal{C} のホモトピー圏 $Ho(\mathcal{C})$ とは、弱同値のクラス W による局所化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ のことである。右導来関手 (resp. 左導来関手) は束置換 (resp. 余束置換) を用いて計算することができる。ここでは (余) 束対象および (余) 束置換の基本的な定義と性質を調べる。

定義 C.2.17. \mathcal{C} はモデル圏とする。 \mathcal{C} の終対象 (resp. 始対象) を $\mathbf{1}$ (resp. \emptyset) と書く。

- 対象 X が束対象 (*fibrant object*) であるとは、ただ一つの射 $X \rightarrow \mathbf{1}$ が束であることを言う。
- 対象 X の束置換 (*fibrant replacement*) または束分解 (*fibrant resolution*) は弱同値 $X \rightarrow \tilde{X}$ で、終域 \tilde{X} が束対象であるものを言う。
- 対象 X が余束対象 (*cofibrant object*) であるとは、ただ一つの射 $\emptyset \rightarrow X$ が余束であることを言う。
- 対象 X の余束置換 (*cofibrant replacement*) または余束分解 (*cofibrant resolution*) は弱同値 $\hat{X} \rightarrow X$ で、終域 \hat{X} が余束対象であるものを言う。

例 C.2.18. 任意の位相空間 X に対し、ただ一つの射 $X \rightarrow \mathbf{1}$ は Serre 束である。よって、位相空間の圏 \mathbf{Top} 上の通常モデル構造に対し、任意の位相空間は束対象である。また、CW 複体は余束対象でもある。

例 C.2.19. 任意の単体的集合 X に対し、ただ一つの射 $\emptyset \rightarrow X$ は単射である。よって、単体的集合の圏 \mathbf{sSet} 上の通常モデル構造に対し、任意の単体的集合は余束対象である。また、 \mathbf{sSet} 上の束対象のことを Kan 複体と呼ぶ。

モデル圏 \mathcal{C} に対し、 \mathcal{C} の束対象全体からなる充満部分圏を \mathcal{C}_f と書き、 \mathcal{C} の余束対象全体からなる充満部分圏を \mathcal{C}_c と書く。さらに \mathcal{C} の束対象かつ余束対象である対象全体からなる充満部分圏を \mathcal{C}_{fc} と書く。

余束対象とホモトピー

束対象と余束対象は双対概念だから、ここからは余束対象についてを主に論じる。まずは左ホモトピーとの関係を調べる。

命題 C.2.20. X をモデル圏上の余束対象とする。

1. 任意の対象 Y に対し、標準的な入射 $Y \rightarrow X \amalg Y$ は余束である。特に、 X と Y が共に余束対象ならば $X \amalg Y$ も余束対象である。
2. $\text{Cyl}(X)$ を X の良い筒対象とする。標準的な (二つの) 入射 $X \rightarrow X \amalg X$ と $X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ の合成は非輪状余束である。
3. X を始域とする射の関係 $\stackrel{l}{\simeq}$ は推移律を満たす。(すなわち $\stackrel{l}{\simeq}$ は同値関係である。)
4. 任意の非輪状束 $f : Y \rightarrow Z$ が導く左ホモトピー類の間の写像 $f_* : \pi^l(X, Y) \rightarrow \pi^l(X, Z)$ は全単射である。
5. X を終域とする任意の非輪状束 f は分裂全射である。さらに、 f の任意の右逆射を i とすると、 $i \circ f$ は id_X に左ホモトピックである。

証明. 1. は次の図式が押し出しであることから従う。

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \amalg Y \end{array}$$

2. を示す。まず $X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ が余束であることは 1. から従う。さらに、 $X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ は弱同値 $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$ の右逆射だから、これは弱同値である。よって $X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ は非輪状余束である。

3. を示す。 $f \stackrel{l}{\simeq} g$ かつ $g \stackrel{l}{\simeq} h$ と仮定する。 f から g への良い左ホモトピー $H : C \rightarrow \cdot$ 、および g から h への左ホモトピー $H' : D \rightarrow \cdot$ をとる。 C は X の良い筒対象である。第

k 入射 $X \rightarrow X \amalg X (k = 1, 2)$ を i_k と書く。 i_2 と $X \amalg X \rightarrow C$ の合成を j と書き、 i_1 と $X \amalg X \rightarrow D$ の合成を j' と書く。次の図式が押し出しであるように対象 E をとる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & C \\ j' \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E \end{array}$$

2. より j は非輪状余束だから、 $D \rightarrow E$ も非輪状余束である。よって自然に弱同値 $E \rightarrow X$ が導かれ、これによって E は X の筒対象となる。次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & C \\ j' \downarrow & \searrow g & \downarrow H \\ D & \xrightarrow{H'} & \cdot \end{array}$$

よって、次の図式を可換とする $H'' : E \rightarrow \cdot$ がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & E & \longleftarrow & D \\ & \searrow H & \downarrow H'' & \swarrow H' & \\ & & \cdot & & \end{array}$$

この H'' は f から h への左ホモトピーである。

4. は命題 C.2.13 より次の図式が (左ホモトピーによる同値を除いて) 一意なリフトを持つことから明らか。

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

5. は 4. で $X = Z$ とすればよい。 □

次に右ホモトピーとの関係を調べる。

命題 C.2.21. X をモデル圏上の余束対象とする。

1. X を始域とする二つの射 $f, g : X \rightarrow Y$ に対し、 $f \stackrel{l}{\simeq} g$ ならば $f \stackrel{r}{\simeq} g$ である。
2. X を始域とする二つの射 $f, g : X \rightarrow Y$ に対し、 $f \stackrel{r}{\simeq} g$ ならば f から g への非常に良い右ホモトピーが存在する。
3. 任意の射 $f : Y \rightarrow Z$ は右ホモトピー類の間の写像 $f_* : \pi^r(X, Y) \rightarrow \pi^r(X, Z); [g] \mapsto [f \circ g]$ を導く。(i.e. well-defined である。)
4. $\pi^r(Y, Z) \times \pi^r(X, Y) \rightarrow \pi^r(X, Z); ([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$ は well-defined である。

証明. 1. を示す。 $f \stackrel{l}{\simeq} g (f, g : X \rightarrow Y)$ と仮定する。 f から g への良い左ホモトピー $H : \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ をとり、良い筒対象 $\text{Cyl}(X)$ を定める分解を $X \amalg X \xrightarrow{j_1 \amalg j_2} \text{Cyl}(X) \xrightarrow{p} X$ と表す。また、 Y の良い道対象 $\text{Path}(Y)$ をとる。命題 C.2.20 の 2. より、次の図式はリフト k を持つ。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Path}(Y) \\ j_1 \downarrow & & & \nearrow k & \downarrow \\ \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{(f \circ p) \times H} & Y \times Y & & \end{array}$$

$k \circ j_2$ は f から g への右ホモトピーである。よって $f \stackrel{r}{\simeq} g$ である。

2. を示す。 $f \stackrel{r}{\simeq} g (f, g : X \rightarrow Y)$ と仮定する。 f から g への良い右ホモトピー $H : X \rightarrow P$ をとる。弱同値 $Y \rightarrow P$ の分解 $Y \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} P$ で i が非輪状余束、 p が非輪状束となるものをとる。 Q は Y の非常に良い道対象である。次の図式はリフト H' を持つ。

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Q \\ \downarrow H' & \nearrow & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{H} & P \end{array}$$

H' は f から g への非常に良い右ホモトピーである。

3. を示す。 $g \stackrel{r}{\simeq} h (g, h : X \rightarrow Y)$ と仮定する。 2. より、 g から h への非常に良い右ホモトピー $H : X \rightarrow \text{Path}(Y)$ が存在する。 Z の良い道対象 $\text{Path}(Z)$ をとると、次の図式を可換にする射 $\text{Path}(Y) \rightarrow \text{Path}(Z)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & \text{Path}(Y) & \longrightarrow & Y \times Y \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \times f \\ Z & \longrightarrow & \text{Path}(Z) & \longrightarrow & Z \times Z \end{array}$$

これを H に合成すれば、 $f \circ g$ から $f \circ h$ への非常に良い右ホモトピーが得られる。よって $f \circ g \stackrel{r}{\simeq} f \circ h$ である。以上より、 f_* は well-defined である。

4. を示す。 $f \stackrel{r}{\simeq} f' (f, f' : Y \rightarrow Z)$ かつ $g \stackrel{r}{\simeq} g' (g, g' : X \rightarrow Y)$ と仮定する。このとき、 $f \circ g \stackrel{r}{\simeq} f \circ g' \stackrel{r}{\simeq} f' \circ g'$ である。よって $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$ は well-defined である。 \square

最後に、余束対象と束対象を組み合わせた場合について調べる。

命題 C.2.22. 1. X をモデル圏上の余束対象とし、 Y を束対象とする。二つの射 $f, g : X \rightarrow Y$ に対し、 $f \stackrel{l}{\simeq} g \Leftrightarrow f \stackrel{r}{\simeq} g$ である。(このとき、 $f \stackrel{l}{\simeq} g$ ならば単に $f \simeq g$ と書く。)

2. X と Y をモデル圏上の束対象かつ余束対象である対象とする。射 $f : X \rightarrow Y$ が弱同値であるための必要十分条件は、射 $i : Y \rightarrow X$ が存在して $i \circ f \simeq id_X$ かつ $f \circ i \simeq id_Y$ を満たすことである。(このような i を f のホモトピー逆射と呼ぶ。)

証明. 1. は命題 C.2.21 の 1. より明らか。

2. は命題 C.2.20 の 5. より明らか。 □

C.2.4 ホモトピー圏

\mathcal{C} をモデル圏とする。命題 C.2.21 の 4. より、圏 $\pi^r\mathcal{C}_c$ が次のように定まる。

- 圏 $\pi^r\mathcal{C}_c$ の対象はモデル圏 \mathcal{C} の余束対象である。
- 圏 $\pi^r\mathcal{C}_c$ の射はモデル圏 \mathcal{C} の射の右ホモトピー類である。

双対的に、圏 $\pi^l\mathcal{C}_f$ が次のように定まる。

- 圏 $\pi^l\mathcal{C}_f$ の対象はモデル圏 \mathcal{C} の束対象である。
- 圏 $\pi^l\mathcal{C}_f$ の射はモデル圏 \mathcal{C} の射の左ホモトピー類である。

さらに、圏 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ が次のように定まる。

- 圏 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ の対象はモデル圏 \mathcal{C} の束対象かつ余束対象である対象である。
- 圏 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ の射はモデル圏 \mathcal{C} の射のホモトピー類である。

$\pi\mathcal{C}_{fc}$ は $\pi^r\mathcal{C}_c$ の充満部分圏であり、 $\pi^l\mathcal{C}_f$ の充満部分圏でもある。これから、圏 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ が \mathcal{C} の弱同値のクラスによる局所化に一致することを示す。

関手 $P: \mathcal{C} \rightarrow \pi^r\mathcal{C}_c$ を次のように定義する。まず、 \mathcal{C} の各対象 X に対し、始対象からの唯一の射 $\emptyset \rightarrow X$ の余束と非輪状束による分解 $\emptyset \rightarrow P(X) \rightarrow X$ を一つ選んで固定する。 \mathcal{C} 上の射 $f: X \rightarrow Y$ に対し、命題 C.2.16 より次の図式を可換にする射 $P(X) \rightarrow P(Y)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(Y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

命題 C.2.16 よりこの射 $P(X) \rightarrow P(Y)$ は左ホモトピーによる同値関係を除いて一意である。命題 C.2.21 より右ホモトピーによる同値関係を除いて一意である。よって、この射 $P(X) \rightarrow P(Y)$ の右ホモトピー類を $P(f)$ と定めると、関手 $P: \mathcal{C} \rightarrow \pi^r\mathcal{C}_c$ は well-defined である。

関手 $Q: \pi^r\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{fc}$ を次のように定義する。まず、 \mathcal{C} の各対象 X に対し、終対象への唯一の射 $X \rightarrow \mathbf{1}$ の非輪状余束と束による分解 $X \rightarrow Q(X) \rightarrow \mathbf{1}$ を一つ選んで固定する。 \mathcal{C} 上の射 $f: X \rightarrow Y$ に対し、命題 C.2.16 (の双対) より次の図式を可換にする射 $Q(X) \rightarrow Q(Y)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Q(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Q(Y) \end{array}$$

X と Y が余束対象の時、この射 $Q(X) \rightarrow Q(Y)$ のホモトピー類を $Q([f])$ と定義することによって関手 $Q : \pi^r \mathcal{C}_c \rightarrow \pi \mathcal{C}_{fc}$ を定義したい。

補題 C.2.23. 上記の関手 Q は *well-defined* である。

証明. X が余束対象であることから、命題 C.2.21 の 3. より $Y \rightarrow Q(Y)$ は右ホモトピー類の間の写像 $\pi^r(X, Y) \rightarrow \pi^r(X, Q(Y))$ を導く。 $Q(Y)$ が束対象であることから、命題 C.2.20 の 4.(の双対) より $X \rightarrow Q(X)$ は右ホモトピー類の間の全単射 $\pi^r(Q(X), Q(Y)) \rightarrow \pi^r(X, Q(Y))$ を導く。対応 $[f] \mapsto Q([f])$ は $\pi^r(X, Y) \rightarrow \pi^r(X, Q(Y)) \cong \pi^r(Q(X), Q(Y))$ に一致する。特に *well-defined* である。□

同様に、関手 $Q' : \mathcal{C} \rightarrow \pi^l \mathcal{C}_f$ と $P' : \pi^l \mathcal{C}_f \rightarrow \pi \mathcal{C}_{fc}$ が定義できる。

命題 C.2.20 の 4. より、関手 $Q : \pi^r \mathcal{C}_c \rightarrow \pi \mathcal{C}_{fc}$ は包含関手 $U : \pi \mathcal{C}_{fc} \rightarrow \pi^r \mathcal{C}_c$ の右随伴である。関手 $QP : \mathcal{C} \rightarrow \pi \mathcal{C}_{fc}$ は次の性質を持つ。

命題 C.2.24. \mathcal{C} 上の射 f が弱同値であるための必要十分条件は $QP(f)$ が同型射であることである。

証明.

$$\begin{aligned} f \text{ が弱同値である} &\Leftrightarrow P(f) \text{ が弱同値の右ホモトピー類である} \\ &\Leftrightarrow QP(f) \text{ が弱同値のホモトピー類である} \\ &\Leftrightarrow QP(f) \text{ が同型射である。} \end{aligned}$$

□

関手 $QP : \mathcal{C} \rightarrow \pi \mathcal{C}_{fc}$ が弱同値のクラスに対する局所化を与えることを示そう。まず、局所化には次の十分条件が存在する。

補題 C.2.25. \mathcal{C} と \mathcal{D} は圏とし、 $\text{Iso}(\mathcal{D})$ は \mathcal{D} の同型射全体からなる部分圏とする。関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が次を満たすとする。

- F は本質的全射である。
- F が導く射の圏の間の関手 $\text{Mor}(F) : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$ は本質的全射である。

このとき、 \mathcal{D} は \mathcal{C} の $F^{-1}(\text{Iso}(\mathcal{D}))$ に対する局所化である。i.e. 次の普遍性を満たす。

- \mathcal{C} 上の射 f に対し、 $f \in F^{-1}(\text{Iso}(\mathcal{D}))$ ならば $F(f)$ は同型射である。
- 関手 $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ について、 $f \in F^{-1}(\text{Iso}(\mathcal{D}))$ ならば $G(f)$ が同型射であるとする。このとき、次の図式を (自然同型を除いて) 可換にする関手 $\hat{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ が (自然同型を除いて) 一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow G & \downarrow \hat{G} \\ & & \mathcal{E} \end{array}$$

証明. 関手 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ について、 $f \in F^{-1}(\text{Iso}(\mathcal{D}))$ ならば $G(f)$ が同型射であるとする。条件を満たす関手 $\hat{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ が存在したとする。 \mathcal{D} の各対象 d に対し、 \mathcal{C} の対象 c_d が存在し、 $d \cong F(c_d)$ である。このとき $\hat{G}(d) \cong \hat{G}(F(c_d)) \cong G(c_d)$ である。よって、このような関手 \hat{G} は自然同型を除いて一意である。

次に関手 \hat{G} の存在を示す。 \mathcal{D} の各対象 d に対し、 $d \cong F(c)$ を満たす \mathcal{C} の対象 c_d を一つとり、 $G(c_d)$ を $\hat{G}(d)$ として定める。 \mathcal{D} 上の各射 $f: d \rightarrow d'$ に対し、 $f \cong F(g_f)$ を満たす \mathcal{C} 上の射 $g_f: c_d \rightarrow c_{d'}$ を一つとり、 $G(g_f)$ を $\hat{G}(f)$ として定める。関手 \hat{G} は条件を満たす。□

これを用いると、直ちに次が得られる。

定理 C.2.26. 関手 $QP: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_{fc}$ は \mathcal{C} の弱同値のクラスによる局所化を与える。

証明. 補題 C.2.25 の条件を確かめればよい。これは簡単にわかる。□

\mathcal{C} の弱同値のクラスによる局所化を $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ と書く。すなわち、 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \pi\mathcal{C}_{fc}$ として計算出来る。

C.2.5 導来関手

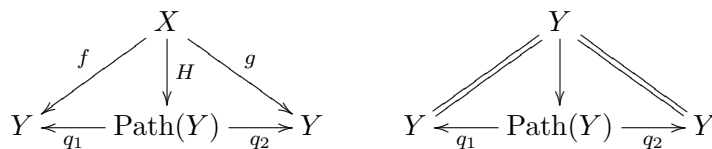
本節では導来関手の一般論を、モデル圏の文脈で論ずる。

定義 C.2.27. \mathcal{C} と \mathcal{D} はモデル圏とする。関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の全右 (resp. 左) 導来関手 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ とは、 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ の $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ に沿った左 (resp. 右) Kan 拡張のことである。 F の全右導来関手を $\mathbb{R}F$ と書き、 F の全左導来関手を $\mathbb{L}F$ と書く。

導来関手は簡単な条件から計算できる。

補題 C.2.28. \mathcal{C} をモデル圏、 \mathcal{E} は一般の圏とする。関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ について、 F が余束対象の間の非輪状余束を同型に移す時、 F の $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ に沿った右 Kan 拡張が存在する。さらにこれは絶対右 Kan 拡張である。

証明. 関手 $F': \pi^r\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{E}$ を $F'([f]) = F(f)$ によって定めたい。 F' が well-defined であることを確かめる。 $f, g: X \rightarrow Y$ を \mathcal{C} 上の余束対象の間の射とする。 $f \simeq^r g$ と仮定する。命題 C.2.21 の 2. より、 f から g への非常に良い右ホモトピー $H: X \rightarrow \text{Path}(Y)$ がとれる。



上の図式を関手 F で移すと、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 & F(X) & \\
 F(f) \swarrow & & \searrow F(g) \\
 F(Y) & \xleftarrow{F(q_1)} F(\text{Path}(Y)) \xrightarrow{F(q_2)} & F(Y) \\
 & \downarrow F(H) & \\
 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & F(Y) & \\
 \cong \swarrow & & \searrow \cong \\
 F(Y) & \xleftarrow{F(q_1)} F(\text{Path}(Y)) \xrightarrow{F(q_2)} & F(Y) \\
 & \downarrow \cong & \\
 & &
 \end{array}$$

関手 F は非輪状余束 $Y \rightarrow \text{Path}(Y)$ を同型へ移すので、 $F(q_1) = F(q_2)$ が得られる。よって、 $F(f) = F(H) \circ F(q_1) = F(H) \circ F(q_2) = F(g)$ である。以上より関手 F' は well-defined である。

次に、 F' が F の $P: \mathcal{C} \rightarrow \pi^r \mathcal{C}_c$ に沿った右 Kan 拡張であることを示す。まず、標準的な非輪状余束 $P(X) \rightarrow X$ の族は自然変換 $\epsilon_X: F'(P(X)) \rightarrow F(X)$ を導く。命題 ?? の 5. より、 X が余束対象ならば ϵ_X は同型であることは直ちにわかる。この ϵ が普遍性を持つことを示す。関手 $G: \pi^r \mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{E}$ および自然変換 $\mu: GP \rightarrow F$ が存在したとする。まず、自然変換 $\hat{\mu}: G \rightarrow F'$ が存在し、 $\epsilon \circ P^*(\hat{\mu}) = \mu$ を満たすと仮定する。任意の余束対象 X に対し、標準的な非輪状余束 $P(X) \rightarrow X$ は圏 $\pi^r \mathcal{C}_c$ 上で同型射である。 $\hat{\mu}$ の自然性より、圏 \mathcal{E} 上で次の可換図式を導く。

$$\begin{array}{ccc}
 G(P(X)) & \xrightarrow{\cong} & G(X) \\
 \hat{\mu}_{P(X)} \downarrow & & \downarrow \hat{\mu}_X \\
 F'(P(X)) & \xrightarrow{\cong} & F'(X)
 \end{array}$$

つまり、 $\hat{\mu}_X$ は $\hat{\mu}_{P(X)} (= \epsilon_X^{-1} \circ \mu_X)$ によって決定される。すなわち $\hat{\mu}_X$ は X のみによって決定されるので、このような $\hat{\mu}$ は存在すれば一意である。逆に、次の図式で $\hat{\mu}_X$ を定義すれば $\epsilon \circ P^*(\hat{\mu}) = \mu$ を満たす自然変換 $\hat{\mu}$ が構成できる。

$$\begin{array}{ccc}
 G(P(X)) & \xrightarrow{\cong} & G(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \hat{\mu}_X \\
 F'(P(X)) & \xrightarrow{\cong} & F'(X) \\
 \downarrow \cong \epsilon_X & & \\
 F(X) & &
 \end{array}
 \quad \mu_X \curvearrowright$$

以上より、 F' が F の P に沿った右 Kan 拡張であることが示された。また、任意の関手 $S: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ に対し、 SF' および $S_*(\epsilon)$ は SF に対して上記の F' と ϵ の構成をそのままなぞったものである。特に SF' は SF の P に沿った右 Kan 拡張である。これは F' が F の P に沿った絶対右 Kan 拡張であることを意味する。

関手 $F'': \pi \mathcal{C}_{fc} \rightarrow \mathcal{E}$ を、 F' の $\pi \mathcal{C}_{fc}$ への制限として定める。 F'' が F' の Q に沿った絶対右 Kan 拡張であることを示す。任意の余束対象 X に対し、標準的な非輪状余束 $X \rightarrow Q(X)$ は自然同型 $F'(X) \rightarrow F''(Q(X))$ を導く。この同型の逆射を $\epsilon': F''Q \rightarrow F'$ と置く。この ϵ' が普遍性を持つことを示す。関手 $G: \pi \mathcal{C}_{fc} \rightarrow \mathcal{E}$ および自然変換 $\mu: GQ \rightarrow F'$ が存在した

とする。まず、自然変換 $\hat{\mu} : G \rightarrow F''$ が存在し、 $e' \circ Q^*(\hat{\mu}) = \mu$ を満たすと仮定する。束対象かつ余束対象である任意の対象 X に対し、標準的な非輪状余束 $X \rightarrow Q(X)$ は圏 $\pi\mathcal{C}_{fc}$ 上で同型射である。 $\hat{\mu}$ の自然性より、圏 \mathcal{E} 上で次の可換図式を導く。

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\cong} & G(Q(X)) \\ \hat{\mu}_X \downarrow & & \downarrow \hat{\mu}_{Q(X)} \\ F''(X) & \xrightarrow{\cong} & F''(Q(X)) \end{array}$$

つまり、 $\hat{\mu}_X$ は $\hat{\mu}_{Q(X)} (= (e')_X^{-1} \circ \mu_X)$ によって決定される。すなわち $\hat{\mu}_X$ は X のみによって決定されるので、このような $\hat{\mu}$ は存在すれば一意である。逆に、次の図式で $\hat{\mu}_X$ を定義すれば $e' \circ Q^*(\hat{\mu}) = \mu$ を満たす自然変換 $\hat{\mu}$ が構成できる。

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\cong} & G(Q(X)) \\ \hat{\mu}_X \downarrow & & \downarrow \\ F''(X) & \xrightarrow{\cong} & F''(Q(X)) \xrightarrow{\mu_X} \\ & & \downarrow \cong (e')_X \\ & & F'(X) \end{array}$$

以上より、 F'' が F' の Q に沿った右 Kan 拡張であることが示された。これが絶対右 Kan 拡張であることも先ほどと同様にわかる。絶対右 Kan 拡張の絶対右 Kan 拡張は絶対右 Kan 拡張だから、 F'' は F の QP に沿った絶対右 Kan 拡張である。□

系 C.2.29. \mathcal{C} と \mathcal{D} はモデル圏とする。関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、 F が余束対象の間の非輪状余束を弱同値に移す時、 F の全左導来関手が存在する。さらにこれは絶対右 Kan 拡張である。

証明. 補題 C.2.28 より明らか。□

C.2.6 Quillen 随伴と Quillen 同値

本節ではモデル圏の間の射を定義する。

補題 C.2.30. \mathcal{C} と \mathcal{D} はモデル圏とする。随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、以下は同値である。

- F が余束と非輪状余束を保つ。
- G が束と非輪状束を保つ。
- F が余束を保ち、 G が束を保つ。

- F が非輪状余束を保ち、 G が非輪状束を保つ。

証明. 命題 C.1.8 より明らか。 □

定義 C.2.31. 上記の条件を満たす随伴 $F \dashv G$ を *Quillen 随伴* と呼ぶ。このとき、 F を左 *Quillen 関手* と呼び、 G を右 *Quillen 関手* と呼ぶ。

Quillen 随伴の性質を調べよう。まず、左 Quillen 関手は全左導来関手を持つ。(双対的に、右 Quillen 関手は全右導来関手を持つ。)

命題 C.2.32. モデル圏の間の Quillen 随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、 F は全左導来関手 $\mathbb{L}F$ を持つ。 $\mathbb{L}F$ は絶対右 Kan 拡張である。双対的に、 G は全右導来関手 $\mathbb{R}G$ を持つ。 $\mathbb{R}G$ は絶対左 Kan 拡張である。

証明. 系 C.2.29 より明らか。 □

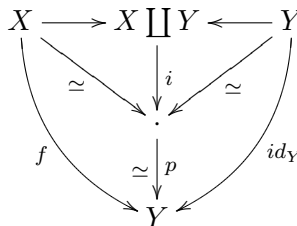
Quillen 関手の場合、導来関手はもう少し綺麗に計算できる。これは次の性質によるものである。

補題 C.2.33. モデル圏の間の Quillen 随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、次が成り立つ。

1. F は余束対象を保つ。双対的に、 G は束対象を保つ。
2. F は余束対象の間の弱同値を保つ。双対的に、 G は束対象の間の弱同値を保つ。
3. F は余束対象の非常に良い道対象を道対象へ移す。
4. F は関手 $F' : \pi^r \mathcal{C}_c \rightarrow \pi^r \mathcal{D}_c; [f] \mapsto [F(f)]$ を導く。(i.e. well-definedである。) 双対的に、 G は関手 $G' : \pi^l \mathcal{D}_f \rightarrow \pi^l \mathcal{C}_f$ を導く。
5. 上記の関手 F' は $P_{\mathcal{D}} F : \mathcal{C} \rightarrow \pi^r \mathcal{D}_c$ の $P_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \pi^r \mathcal{C}_c$ に沿った絶対右 Kan 拡張である。双対的に、関手 G' は $Q'_{\mathcal{C}} G : \mathcal{D} \rightarrow \pi^l \mathcal{C}_f$ の $Q'_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \pi^l \mathcal{D}_f$ に沿った絶対左 Kan 拡張である。
6. $Q_{\mathcal{D}} F' U$ は $Q_{\mathcal{D}} F'$ の $Q_{\mathcal{C}}$ に沿った絶対右 Kan 拡張である。双対的に、 $P'_{\mathcal{C}} G' U$ は $P'_{\mathcal{D}} G'$ の $P'_{\mathcal{D}}$ に沿った絶対左 Kan 拡張である。

証明. 1. は F が始対象と余束を保つことから明らか。

2. を示す。 $f : X \rightarrow Y$ は \mathcal{C} 上の余束対象の間の弱同値とする。 $f \amalg id_Y : X \amalg Y \rightarrow Y$ の分解 $f \amalg id_Y = p \circ i$ で、 p が非輪状束かつ i が余束であるものをとる。(これは f の“写像錐 (mapping cone)” の構成である。) このとき、次の図式を考える。



X と Y が余束対象であることから、命題 C.2.20 の 1. より、 $X \rightarrow \cdot$ と $Y \rightarrow \cdot$ は余束である。これらは弱同値でもあるので、 $X \rightarrow \cdot$ と $Y \rightarrow \cdot$ は非輪状余束である。 F は非輪状余束を保つから、 $F(X) \rightarrow F(\cdot)$ と $F(Y) \rightarrow F(\cdot)$ は非輪状余束である。上の図式を関手 F で移すと、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & & F(Y) \\
 \searrow & \simeq & \swarrow \\
 & F(\cdot) & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 F(Y) & & F(Y)
 \end{array}$$

$F(f)$ (left arrow), $id_{F(Y)}$ (right arrow)

よって $F(f)$ は弱同値である。

- 3. は F が非輪状余束を保つことから明らか。
- 4. は 3. と命題 C.2.21 の 2. より明らか。
- 5. と 6. は補題 C.2.28 と全く同様である。

□

この性質を用いて、左 Quillen 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の全左導来関手 $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ を計算してみよう。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi \mathcal{C}_{fc} & \xrightarrow{Q_2 F' U} & \pi \mathcal{D}_{fc} \\
 Q_1 \uparrow & \Downarrow \nu'' & \uparrow Q_2 \\
 \pi^r \mathcal{C}_c & \xrightarrow{F'} & \pi^r \mathcal{D}_c \\
 P_1 \uparrow & \Downarrow \nu' & \uparrow P_2 \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

$Q_2 F' U$ は $Q_2 F'$ の Q_1 に沿った絶対右 Kan 拡張である。絶対右 Kan 拡張の絶対右 Kan 拡張は絶対右 Kan 拡張だから、 $F' U$ は F の QP に沿った絶対右 Kan 拡張である。すなわち、関手 $Q_2 F' U : \pi \mathcal{C}_{fc} \rightarrow \pi \mathcal{D}_{fc}$ が F の全左導来関手である。

右 Kan 拡張 F' に付随する普遍射 ν' は標準的な非輪状束 $P(X) \rightarrow X$ によって導かれる射 $(\nu')_X : F'(P_1(X)) \xrightarrow{\cong} P_2(F'(P_1(X))) \rightarrow P_2(F(X))$ の集まりである。 $Q_2 F'$ の Q_1 に沿った右 Kan 拡張 $Q_2 F' U$ に付随する普遍射 ν'' は標準的な非輪状余束 $X \rightarrow Q_1(X)$ によって導かれる射 $(\nu'')_X : Q_2(F'(U(Q_1(X)))) \xrightarrow{\cong} Q_2(F'(X))$ の集まりである。

よって、 F の全左導来関手 $\mathbb{L}F$ に付随する普遍射 ν は ν' と ν'' を合成して得られる。具体的には、

$$\nu = (Q_2)_*(\nu') \circ P_1^*(\nu'') : \mathbb{L}F Q_1 P_1 \rightarrow Q_2 P_2 F$$

と表せる。(下図を参照。)

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{L}F(Q_1(P_1(X))) \cong Q_2(F'(U(Q_1(P_1(X)))))) \\
 \downarrow \cong \uparrow P_1^*(\nu'') \\
 Q_2(F'(P_1(X))) \xleftarrow{\cong} Q_2(P_2(F'(P_1(X)))) \xrightarrow{\cong} Q_2(P_2(F(X))) \\
 \xleftarrow{(Q_2)_*(\nu')} \xrightarrow{\quad}
 \end{array}$$

双対的に、右 Quillen 関手 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ の全右導来関手 $\mathbb{R}G$ に付随する普遍射 $\mu: P'_1 Q'_1 G \rightarrow \mathbb{R}G P'_2 Q'_2$ は下図のように分解できる。

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}G(P'_1(Q'_1(X))) \cong P'_2(G'(U(P'_1(Q'_1(X)))))) \\
 \downarrow \cong \\
 P'_2(G'(Q'_1(X))) \xrightarrow{\cong} P'_2(Q'_2(G'(Q'_1(X)))) \xleftarrow{\cong} P'_2(Q'_2(G(X))) \\
 \xleftarrow{\mu} \xrightarrow{\quad}
 \end{array}$$

ただし、 U は適切な包含関手である。図式を丁寧に追えば、 ν は余束置換 $P(X) \rightarrow X$ を F で送った射と同型であり、 μ は束置換 $X \rightarrow Q(X)$ を G で送った射と同型であることがわかる。特に、次が成り立つ。

補題 C.2.34. \mathcal{C} 上の任意の余束対象 X に対し、 ν_X は同型である。双対的に、 \mathcal{D} 上の任意の束対象 X に対し、 μ_X は同型である。

証明. \mathcal{C} 上の任意の余束対象 X に対し、 $P_1(X) \rightarrow X$ は余束対象の間の弱同値である。補題 C.2.33 の 2. より、 $FP_1(X) \rightarrow F(X)$ は \mathcal{D} 上で弱同値である。よって $Q_2(P_2(F'(P_1(X)))) \rightarrow Q_2(P_2(F(X)))$ は同型である。よって、 ν_X は同型である。 \square

導来随伴

Quillen 随伴の全道来関手はホモトピー圏の間に随伴を導く。これは次の命題から従う。

命題 C.2.35. $F \dashv G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は一般の圏の間の随伴とする。また、 $S: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ と $T: \mathcal{D} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ は関手とする。 TF の S に沿った絶対右 Kan 拡張 $\hat{F}: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ および SG の T に沿った絶対左 Kan 拡張 $\hat{G}: \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ が存在した時、随伴 $\hat{F} \dashv \hat{G}: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ が存在する。

証明. \hat{F} は TF の S に沿った絶対右 Kan 拡張だから、任意の関手 $\hat{K}: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$ と $\hat{L}: \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}$ に対し、次の同型

$$\text{Nat}(\hat{K}S, \hat{L}TF) \cong \text{Nat}(\hat{K}, \hat{L}\hat{F})$$

を得る。 \hat{G} は SG の T に沿った絶対左 Kan 拡張だから、任意の関手 \hat{K} と \hat{L} に対し、次の同型

$$\text{Nat}(\hat{K}SG, \hat{L}T) \cong \text{Nat}(\hat{K}\hat{G}, \hat{L})$$

を得る。 F が G の左随伴であることは、 F が Id の G に沿った絶対右 Kan 拡張であることを意味する。よって、任意の関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ と $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ に対し、次の同型

$$\text{Nat}(KG, L) \cong \text{Nat}(K, LF)$$

を得る。特に $K = \hat{K}S$ かつ $L = \hat{L}T$ の時、次の同型

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\hat{K}\hat{G}, \hat{L}) &\cong \text{Nat}(\hat{K}S\hat{G}, \hat{L}T) \\ &\cong \text{Nat}(\hat{K}S, \hat{L}TF) \\ &\cong \text{Nat}(\hat{K}, \hat{L}\hat{F}) \end{aligned}$$

を得る。これは \hat{F} が Id の \hat{G} に沿った絶対右 Kan 拡張であることを意味する。すなわち、 \hat{F} は \hat{G} の左随伴である。□

直ちに次が従う。

補題 C.2.36. モデル圏の間の *Quillen* 随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ が存在する。

証明. 命題 C.2.32 と命題 C.2.35 より明らか。□

定義 C.2.37. 上記の随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ を *Quillen* 随伴 $F \dashv G$ の導来随伴と呼ぶ。

導来随伴の単位射 $\hat{\eta} : Id_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{L}F$ を計算してみよう。(余単位射も双対的に計算できる。) 導来随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ は同型 $\text{Nat}(\hat{K}\mathbb{R}G, \hat{L}) \cong \text{Nat}(\hat{K}, \hat{L}\mathbb{L}F)$ によって特徴づけられている。特に、 $\hat{K} = Id$ かつ $\hat{L} = \mathbb{R}G$ のとき、同型 $\text{Nat}(\mathbb{R}G, \mathbb{R}G) \cong \text{Nat}(Id, \mathbb{R}\mathbb{L}F)$ を得る。この同型による $id_{\mathbb{R}G}$ の像が単位射 $\hat{\eta}$ である。これを計算する。命題 C.2.35 の構成を思い出すと、 $\hat{K} = Id$ かつ $\hat{L} = \mathbb{R}G$ のとき、次の同型

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\mathbb{R}G, \mathbb{R}G) &\cong \text{Nat}(SG, \mathbb{R}GT) \\ &\cong \text{Nat}(S, \mathbb{R}GTF) \\ &\cong \text{Nat}(Id, \mathbb{R}\mathbb{L}F) \end{aligned}$$

を得る。ただし、関手 $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ および $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ は局所化を与える関手である。最初の同型による $id_{\mathbb{R}G}$ の像は、左 Kan 拡張 $\mathbb{R}G$ に付随する普遍射 $\mu : SG \rightarrow \mathbb{R}GT$ に同値である。二つ目の同型は、 SG が S の F に沿った左 Kan 拡張であることから得られる。随伴 $F \dashv G$ の単位射を $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ と表すと、二つ目の同型による μ の像は $F^*(\mu) \circ S_*(\eta)$ と表せる。これを η' と置く。最後に、右 Kan 拡張 $\mathbb{L}F$ に付随する普遍射を $\nu : \mathbb{L}FS \rightarrow TF$ とすると、最後の同型による η' の像 $\hat{\eta}$ は $\hat{\eta} = \mathbb{R}G_*(\nu) \circ S^*(\eta')$ によって特徴づけられる。特に、 \mathcal{C} 上の束対象かつ余束対象である任意の対象 X に対し次の図式が

得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
Q_1(P_1(X)) & \xlongequal{\quad} & Q_1(P_1(X)) & \xleftarrow{\simeq} & P_1(X) & \xrightarrow{\simeq} & X \\
\downarrow Q_1(P_1(\eta_X)) & & \downarrow \hat{\eta}_{Q_1(P_1(X))} & & \downarrow \hat{\eta}_{P_1(X)} & & \downarrow \hat{\eta}_X \\
Q_1(P_1(G(F(X)))) & & \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(Q_1(P_1(X)))) & \xleftarrow{\simeq} & \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(P_1(X))) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(X)) \\
\downarrow \mu_{F(X)} & & \simeq \downarrow \mathbb{R}G(\nu_X) & & & & \\
\mathbb{R}G(Q_2(P_2(F(X)))) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}G(Q_2(P_2(F(X)))) & & & &
\end{array}$$

ただし、 $\mathbb{R}G(\nu_X)$ は補題 C.2.34 より同型である。 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上で $Q_1(P_1(\eta_X))$ は η_X と同型である。先ほど計算したように、 $\mu_{F(X)}$ は $F(X)$ の束置換を G で送ったものと同型である。以上より、次が得られる。

命題 C.2.38. *Quillen* 随伴 $F \dashv G$ の単位射を η とし、導来随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ の単位射を $\hat{\eta}$ とする。 \mathcal{C} 上の束対象かつ余束対象である任意の対象 X に対し、束置換 $\iota: F(X) \rightarrow \widehat{F(X)}$ をとると、 $\hat{\eta}_X$ は合成射 $X \xrightarrow{\eta_X} G(F(X)) \xrightarrow{G(\iota)} G(\widehat{F(X)})$ と同型である。

Quillen 同値

モデル圏の間の同値関係を定義する。

補題 C.2.39. \mathcal{C} と \mathcal{D} はモデル圏とする。 \mathcal{C} 上の弱同値のクラスを W とし、 \mathcal{D} 上の弱同値のクラスを W' とする。*Quillen* 随伴 $F \dashv G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、以下は同値である。

1. \mathcal{C} 上の余束対象 X と \mathcal{D} 上の束対象 Y に対し、随伴 $\mathcal{D}(F(X), Y) \cong \mathcal{C}(X, G(Y))$ は同型 $W'(F(X), Y) \cong W(X, G(Y))$ を導く。(すなわち、上記の X と Y に対し、射 $F(X) \rightarrow Y$ が弱同値であるとき、かつそのときに限り、随伴によって対応する射 $X \rightarrow G(Y)$ が弱同値である。)
2. \mathcal{C} 上の余束対象 X と \mathcal{D} 上の束対象 Y 、および束置換 $F(X) \rightarrow \widehat{F(X)}$ と余束置換 $\widehat{G(Y)} \rightarrow G(Y)$ に対し、二つの合成射 $X \rightarrow G(F(X)) \rightarrow G(\widehat{F(X)})$ と $F(\widehat{G(Y)}) \rightarrow F(G(Y)) \rightarrow Y$ は弱同値である。
3. $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ は圏同値 $Ho(\mathcal{C}) \simeq Ho(\mathcal{D})$ である。

証明. 1. \Rightarrow 2. を示す。 Y についての証明は全く同様なので、 X についてのみ示す。これは、随伴の同型によって射 $X \rightarrow G(\widehat{F(X)})$ と $F(X) \rightarrow \widehat{F(X)}$ が対応することから明らか。

2. \Rightarrow 1. を示す。 \mathcal{C} 上の余束対象 X と \mathcal{D} 上の束対象 Y をとる。射 $f: F(X) \rightarrow Y$ が弱同値であると仮定し、随伴によって f と対応する射 $\hat{f}: X \rightarrow G(Y)$ が弱同値であることを示す。 \hat{f} が弱同値であると仮定すると、双対的に f が弱同値であることを示せる。)

$F(X)$ の束置換 $F(X) \rightarrow \widetilde{F(X)}$ で非輪状余束であるものをとる。 Y が束対象であることから次のリフト g が存在する。

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow \\ \widetilde{F(X)} & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

f が弱同値であることから、 g も弱同値である。また、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{f} & & \\ X & \longrightarrow & G(F(X)) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \\ & \searrow \simeq & \downarrow & \nearrow G(g) & \\ & & G(\widetilde{F(X)}) & & \end{array}$$

g は束対象の間の弱同値だから、補題 C.2.33 の 2. より、 $G(g)$ も弱同値である。 2. より $X \rightarrow G(\widetilde{F(X)})$ は弱同値である。よって \hat{f} が弱同値であることが示された。

2. \Rightarrow 3. は命題 C.2.38 より明らか。

3. \Rightarrow 2. を示す。 3. より、 2. の条件は X と Y が束対象かつ余束対象であれば成り立つ。一般の X と Y に対して 2. が成り立つことを示す。 Y についての証明は全く同様なので、 X についてのみ示す。 X の束置換 $X \rightarrow X'$ で非輪状余束であるものをとる。 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{\simeq} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(F(X')) & \xleftarrow{\quad} & G(F(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\widetilde{F(X')}) & \xleftarrow{\quad} & G(\widetilde{F(X)}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(X') & \xleftarrow{\simeq} & F(X) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \widetilde{F(X')} & \xleftarrow{\quad} & \widetilde{F(X)} \end{array}$$

F は非輪状余束を保つので、 $F(X) \rightarrow F(X')$ は弱同値である。よって $\widetilde{F(X)} \rightarrow \widetilde{F(X')}$ は束対象の間の弱同値である。よって補題 C.2.33 の 2. より、 $G(\widetilde{F(X)}) \rightarrow G(\widetilde{F(X')})$ は弱同値である。よって $X \rightarrow G(\widetilde{F(X)})$ は弱同値である。 \square

定義 C.2.40. 上記の条件を満たす Quillen 随伴 $F \dashv G$ を Quillen 同値と呼ぶ。

C.2.7 ホモトピー極限

C.3 余束生成モデル圏

モデル圏の公理は非常に便利だが、与えられた圏がモデル構造を持つことを示すのは一般には難しい。しかし、例えば位相空間の圏では、 $\Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$ に対して右リフト性

質を持つものとして Serre 束が定義され、 $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ を貼り合わせて得られる相対セル複体のレトラクトを余束とすることでモデル構造が得られるのであった。すなわち、本質的にはこれらの写像の集合が位相空間の圏のモデル構造を決定しているのである。本節ではこのような構成を一般化するため、余束生成モデル圏を定義する。さらに、ある写像の集合が余束生成モデル構造を生成するための必要十分条件を示す。次に、このような構成の簡単な応用として、余束生成モデル構造の推移定理を示す。

C.3.1 余束生成モデル圏

まずは余束生成モデル圏を定義する。

定義 C.3.1 (余束生成モデル圏). モデル圏 \mathcal{C} のモデル構造が余束生成 (*cofibrantly generated*) であるとは、 \mathcal{C} 上の射の集合 I と J が存在し、次を満たすことである。

- \mathcal{C} 上の余束のクラスは、 I -相対セル複体のレトラクトのクラスに一致する。
- \mathcal{C} 上の非輪状余束のクラスは、 J -相対セル複体のレトラクトのクラスに一致する。
- I と J は共に小対象引数を許容する。

このとき、 I が余束を生成すると言い、 J が非輪状余束を生成すると言う。

射のクラス I に対し、 I -相対セル複体のレトラクトのクラスを $\text{Cof}(I)$ と表す。 $\text{rlp}(I)$ とは I に対して右リフト性質を持つ射全体のクラスであった (cf. 定義 C.1.5) ことを思い出そう。射の集合 I と J が与えられた時、これらが余束生成モデル圏を生成するための必要十分条件は、次の定理で与えられる。

定理 C.3.2 (認識定理 (Recognition Theorem)). \mathcal{C} を圏とし、 W は \mathcal{C} 上の射のクラス、 I と J は \mathcal{C} 上の射の集合とする。 I が余束を、 J が非輪状余束を生成し、 W を弱同値のクラスとする \mathcal{C} 上の余束生成モデル構造が存在するための必要十分条件は、次を満たすことである。

1. $\text{Cof}(J) \subset \text{Cof}(I) \cap W$ である。
2. $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である。
3. 上記の二つの包含のうち、片方について逆の包含が成り立つ。すなわち、次のいずれかが成り立つ。
 - (a) $\text{Cof}(J) \supset \text{Cof}(I) \cap W$ である。
 - (b) $\text{rlp}(I) \supset \text{rlp}(J) \cap W$ である。
4. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W に含まれるならば、残りの一つも W に含まれる。

5. I と J は小対象引数を許容する。

証明. 条件 5. と命題 C.1.28 より、 $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ と $(\text{Cof}(J), \text{rlp}(J))$ は弱分解系である。次を示す。

1. $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ である。
2. $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ である。

条件 1. と 2. と 3. より、どちらかは既に満たされている。証明は全く同様なので、 $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ であると仮定し、 $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ であることを示す。条件 2. より、 $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ である。あとは $\text{rlp}(I) \supset \text{rlp}(J) \cap W$ であることを示せばよい。任意に $f \in \text{rlp}(J) \cap W$ をとる。 $(\text{Cof}(I), \text{rlp}(I))$ が弱分解系であることから、 $f = p \circ i$ なる分解で $i \in \text{Cof}(I)$ かつ $p \in \text{rlp}(I)$ を満たすものが存在する。 $\text{rlp}(I) \subset \text{rlp}(J) \cap W$ より、 $p \in W$ である。 $f \in W$ であることと条件 4. より、 $i \in W$ である。よって、 $\text{Cof}(J) = \text{Cof}(I) \cap W$ であることより、 $i \in \text{Cof}(J)$ である。よって次の図式はリフト g を持つ。

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow i & \nearrow g & \downarrow f \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ & & p \end{array}$$

これは f が p のレトラクトであることを意味する。よって、 $f \in \text{rlp}(I)$ である。

以上より、 $\text{Cof} = \text{Cof}(I)$ および $\text{Fib} = \text{rlp}(J)$ とすれば、 $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ が求めるモデル構造である。□

C.3.2 推移定理

余束生成モデル構造は随伴によって容易に推移する。この時、与えられた随伴は Quillen 随伴の典型的な例である。これを示そう。

定理 C.3.3. \mathcal{C} は射の集合 I が余束を、 J が非輪状余束を生成する余束生成モデル圏の構造を持つとする。 W は \mathcal{C} の弱同値のクラスとする。一般の圏 \mathcal{D} と随伴 $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し、次を満たすと仮定する。

1. $F(I)$ と $F(J)$ は小対象引数を許容する。
2. $\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(W)$ である。

このとき、 \mathcal{D} 上の余束生成モデル構造であって、 $G^{-1}(W)$ を弱同値のクラスとして、集合 $F(I)$ が余束を、 $F(J)$ が非輪状余束を生成するものが存在する。さらにこのとき、随伴 $F \dashv G$ は Quillen 随伴である。

証明. 定理 C.3.2 を応用するため、次を示す。

- (1) $\text{Cof}(F(J)) \subset \text{Cof}(F(I)) \cap G^{-1}(W)$ である。
- (2) $\text{rlp}(F(I)) = \text{rlp}(F(J)) \cap G^{-1}(W)$ である。
- (3) 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが $G^{-1}(W)$ に含まれるならば、残りの一つも $G^{-1}(W)$ に含まれる。
- (4) $F(I)$ と $F(J)$ は小対象引数を許容する。

このうち (3) は明らかで、(4) は仮定より満たされている。

(1) を示す。仮定より $\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(W)$ である。 W はレトラクトについて閉じているので、 $\text{Cof}(F(J)) \subset G^{-1}(W)$ である。次に $\text{Cof}(F(J)) \subset \text{Cof}(F(I))$ であることを示す。まず $J \subset \text{Cof}(I)$ である。よって $F(J) \subset F(\text{Cof}(I))$ である。 F は任意の余極限とレトラクトを保つので、 $F(\text{Cof}(I)) \subset \text{Cof}(F(I))$ である。よって $F(J) \subset \text{Cof}(F(I))$ である。 $\text{Cof}(F(I))$ はセル複体とレトラクトをとる操作について閉じているので、 $\text{Cof}(F(J)) \subset \text{Cof}(F(I))$ である。

(2) を示す。命題 C.1.8 より、 $\text{rlp}(F(I)) = G^{-1}(\text{rlp}(I))$ と $\text{rlp}(F(J)) = G^{-1}(\text{rlp}(J))$ を得る。また、 $G^{-1}(\text{rlp}(I)) = G^{-1}(\text{rlp}(J) \cap W) = G^{-1}(\text{rlp}(J)) \cap G^{-1}(W)$ である。よって $\text{rlp}(F(I)) = \text{rlp}(F(J)) \cap G^{-1}(W)$ である。

以上より定理 C.3.2 が使えるので、 \mathcal{D} 上の余束生成モデル構造の存在が示された。

最後に、 F が余極限とレトラクトを保つことから、 F は明らかに余束と非輪状余束を保つ。すなわち随伴 $F \dashv G$ は Quillen 随伴である。□

上記の定理は便利だが、“ $F(I)$ と $F(J)$ が小対象引数を許容する” という条件が扱い辛い。例えば次のような時は条件を満たす。

系 C.3.4. \mathcal{C}, I, J, W と $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は定理 C.3.3 と同様とする。次を満たすと仮定する。

1. G は任意の余極限を保つ。
2. $G(F(I)) \subset \text{cell}(I)$ かつ $G(F(J)) \subset \text{cell}(J)$ である。

このとき、 \mathcal{D} 上の余束生成モデル構造であって、 $G^{-1}(W)$ を弱同値のクラスとして、集合 $F(I)$ が余束を、 $F(J)$ が非輪状余束を生成するものが存在する。さらにこのとき、随伴 $F \dashv G$ は Quillen 随伴である。

証明. 定理 C.3.3 を応用するため、次を示す。

- (1) $F(I)$ と $F(J)$ は小対象引数を許容する。
- (2) $\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(W)$ である。

(1) を示す。\$I\$ (resp. \$J\$) は小対象引数を許容する。すなわち、ある基数 \$\kappa\$ が存在し、\$I\$ (resp. \$J\$) に属する任意の射の始域は \$\text{cell}(I)\$ (resp. \$\text{cell}(J)\$) に対して相対的に \$\kappa\$-小である。仮定 1. と命題 C.1.25 より、\$F(I)\$ (resp. \$F(J)\$) に属する任意の射の始域は \$G^{-1}(\text{cell}(I))\$ (resp. \$G^{-1}(\text{cell}(J))\$) に対して相対的に \$\kappa\$-小である。仮定 1. より、\$G(\text{cell}(F(I))) \subset \text{cell}(G(F(I)))\$ (resp. \$G(\text{cell}(F(J))) \subset \text{cell}(G(F(J)))\$) である。仮定 2. より、\$\text{cell}(G(F(I))) \subset \text{cell}(I)\$ (resp. \$\text{cell}(G(F(J))) \subset \text{cell}(J)\$) である。よって \$\text{cell}(F(I)) \subset G^{-1}(\text{cell}(I))\$ (resp. \$\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(\text{cell}(J))\$) である。以上より \$F(I)\$ (resp. \$F(J)\$) に属する任意の射の始域は \$\text{cell}(F(I)) \subset G^{-1}(\text{cell}(I))\$ (resp. \$\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(\text{cell}(J))\$) に対して相対的に \$\kappa\$-小である。すなわち \$F(I)\$ と \$F(J)\$ は小対象引数を許容する。

(2) を示す。仮定 1. より、\$G(\text{cell}(F(J))) \subset \text{cell}(G(F(J)))\$ である。仮定 2. より、\$\text{cell}(G(F(J))) \subset \text{cell}(J)\$ である。よって \$G(\text{cell}(F(J))) \subset \text{cell}(G(F(J))) \subset \text{cell}(J) \subset \text{Cof}(J) \subset W\$ である。すなわち \$\text{cell}(F(J)) \subset G^{-1}(W)\$ である。 \$\square\$

C.3.3 関手圏のモデル構造

余束生成モデル構造の推移定理の応用として、余束生成モデル圏 \$\mathcal{C}\$ に対し、関手圏 \$\mathcal{C}^{\mathcal{D}}\$ 上の (射影的) モデル構造を与える。まず余束生成モデル圏の積は再び余束生成モデル圏になることを示す。これはパラメータの圏 \$\mathcal{D}\$ が離散圏の場合の関手圏 \$\mathcal{C}^{\mathcal{D}}\$ を例として含む。

命題 C.3.5. \$\mathcal{C}_\lambda (\lambda \in \Lambda)\$ は集合 \$\Lambda\$ で添え字づけられたモデル圏の族とする。この時、積圏 \$\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\$ はモデル圏である。

さらに、各 \$\mathcal{C}_\lambda\$ が余束生成ならば \$\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\$ も余束生成である。

証明. 各 \$\mathcal{C}_\lambda\$ のモデル構造を \$(W_\lambda, \text{Fib}_\lambda, \text{Cof}_\lambda)\$ とすると、\$(\prod_\lambda W_\lambda, \prod_\lambda \text{Fib}_\lambda, \prod_\lambda \text{Cof}_\lambda)\$ は積圏 \$\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\$ 上のモデル構造である。

次に、各 \$\mathcal{C}_\lambda\$ が、射の集合 \$I_\lambda\$ が余束を、\$J_\lambda\$ が非輪状余束を生成する余束生成モデル圏であると仮定する。各 \$\lambda \in \Lambda\$ に対し、積圏 \$\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\$ 上の射の集合 \$\overline{I}_\lambda\$ と \$\overline{J}_\lambda\$ を次のように定義する。(ただし、\$\emptyset\$ は各圏の始対象である。)

$$\begin{aligned} \overline{I}_\lambda &= \left(\prod_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda} \{id_\emptyset\} \right) \times I_\lambda \\ \overline{J}_\lambda &= \left(\prod_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda} \{id_\emptyset\} \right) \times J_\lambda \end{aligned}$$

積圏 \$\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\$ は、射の集合 \$\prod_\lambda \overline{I}_\lambda\$ が余束を、\$\prod_\lambda \overline{J}_\lambda\$ が非輪状余束を生成する余束生成モデル圏である。 \$\square\$

\$\mathcal{D}\$ は小さい圏として、次の随伴を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{Ob(\mathcal{D})} & \xleftarrow{G} & \mathcal{C}^{\mathcal{D}} \\ & \top & \\ & \xrightarrow{F} & \end{array}$$

ただし、

- $G(S) = (S(p))_{p \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$
- $[F((X_p)_p)](q) = \coprod_{p \rightarrow q} X_p$

とする。系 C.3.4 と命題 C.3.5 より、次の定理を得る。

定理 C.3.6 (射影モデル構造). \mathcal{C} は余束生成モデル圏とし、 \mathcal{D} は小さい圏とする。関手圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ は以下を満たすモデル構造を持つ。

- $f: S \rightarrow T$ が弱同値である
 \Leftrightarrow 任意の対象 $p \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、 $f_p: S(p) \rightarrow T(p)$ が弱同値である。
- $f: S \rightarrow T$ が束である
 \Leftrightarrow 任意の対象 $p \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、 $f_p: S(p) \rightarrow T(p)$ が束である。

証明. \mathcal{C} の弱同値のクラスを W とする。また、 \mathcal{C} の射の集合 I と J が存在し、 I は余束を、 J は非輪状余束を生成する。命題 C.3.5 より、圏 $\mathcal{C}^{\text{Ob}(\mathcal{D})}$ は余束生成モデル構造を持ち、 $W' = W^{\text{Ob}(\mathcal{D})}$ を弱同値のクラスとし、 $I' = \coprod \overline{I}_p$ が余束を、 $J' = \coprod \overline{J}_p$ が非輪状余束を生成する。ただし、 \overline{I}_p および \overline{J}_p は命題 C.3.5 の証明と同様に定義されたものである。系 C.3.4 を応用するため、次を示す。

1. G は任意の余極限を保つ。
2. $G(F(I')) \subset \text{cell}(I')$ かつ $G(F(J')) \subset \text{cell}(J')$ である。

$\mathcal{C}^{\text{Ob}(\mathcal{D})}$ 上の余極限と $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ 上の余極限は、どちらも objectwise に計算できる。よって G は任意の余極限を保つ。また、各 $f \in I'$ に対して $G(F(f))$ は適当な $g \in \overline{I}_p$ の直和である。よって $G(F(f)) \in \text{cell}(I')$ である。すなわち $G(F(I')) \subset \text{cell}(I')$ である。同様に $G(F(J')) \subset \text{cell}(J')$ である。以上より系 C.3.4 の条件を満たすので、関手圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ は求めるモデル構造を持つ。 \square

C.4 デカルト閉モデル圏

単体的集合の圏 \mathbf{sSet} において、 $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ は代表的な余束であり、 $\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n$ は代表的な非輪状余束である。ここで、別の余束 $i: \partial(\Delta^n \times \Delta^m) \hookrightarrow \Delta^n \times \Delta^m$ について考察する。境界は次のように分解できる。

$$\partial(\Delta^n \times \Delta^m) = ((\partial\Delta^n) \times \Delta^m) \cup_{(\partial\Delta^n) \times (\partial\Delta^m)} (\Delta^n \times (\partial\Delta^m))$$

すなわち、次の図式の左下の四角は押し出しである。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Delta^n \times \Delta^m \\
 & \nearrow & \uparrow i \\
 (\partial\Delta^n) \times \Delta^m & \longrightarrow & \partial(\Delta^n \times \Delta^m) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\partial\Delta^n) \times (\partial\Delta^m) & \longrightarrow & \Delta^n \times (\partial\Delta^m)
 \end{array}$$

実は、一般に圏 \mathbf{sSet} 上の二つの余束 $A \rightarrow B$ と $A' \rightarrow B'$ に対し、

$$(A \times B') \cup_{A \times A'} (B \times A') \rightarrow B \times B'$$

は余束である。さらに、 $A \rightarrow B$ が非輪状余束ならば上記の射も非輪状である。このような性質を持つ時、モデル構造と積構造が compatible であるという。モデル圏がデカルト閉であり、さらにモデル構造と積構造が compatible であるとき、これをデカルト閉モデル圏と呼ぶ。

記号の導入

整理して述べるため、記号を用意する。

定義 C.4.1. 有限積と押し出しを持つ圏 \mathcal{C} 上の二つの射 $f : A \rightarrow B$ と $f' : A' \rightarrow B'$ に対し、次の射 $(A \times B') \cup_{A \times A'} (B \times A') \rightarrow B \times B'$ を $f \nabla f'$ と表す。

$$\begin{array}{ccc}
 & & B \times B' \\
 & \nearrow f \times B' & \uparrow f \nabla f' \\
 A \times B' & \longrightarrow & (A \times B') \cup_{A \times A'} (B \times A') \\
 \uparrow A \times f' & & \uparrow \\
 A \times A' & \xrightarrow{f \times A'} & B \times A'
 \end{array}$$

さらに \mathcal{C} がデカルト閉であるとする。 \mathcal{C} 上の二つの射 $f : A \rightarrow B$ と $g : X \rightarrow Y$ に対し、次の射を $g \# f$ と表す。

$$\begin{array}{ccc}
 X^B & \xrightarrow{X^f} & X^A \\
 \downarrow g \# f & & \downarrow g^A \\
 Y^B \times_{Y^A} X^A & \longrightarrow & X^A \\
 \downarrow g^B & & \downarrow g^A \\
 Y^B & \xrightarrow{Y^f} & Y^A
 \end{array}$$

これらはリフト性質について次の性質を持つ。

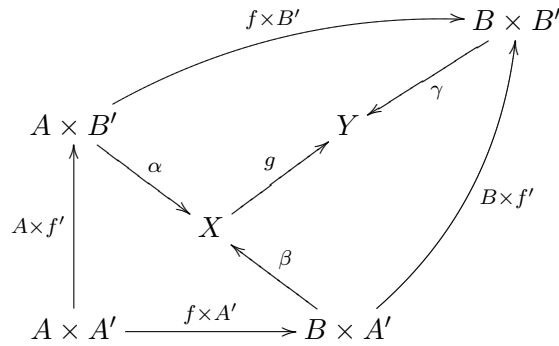
命題 C.4.2. デカルト閉圏 \mathcal{C} 上の射 $f: A \rightarrow B$ 、 $f': A' \rightarrow B'$ および $g: X \rightarrow Y$ に対し、以下は同値である。

- $f \nabla f' \pitchfork g$
- $f \pitchfork g \# f'$

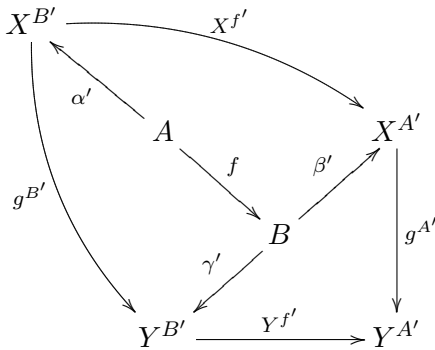
証明. 対象 C と Z を

$$\begin{aligned} C &= (A \times B') \cup_{A \times A'} (B \times A') \\ Z &= Y^{B'} \times_{Y^{A'}} X^{A'} \end{aligned}$$

と置く。次の可換図式 (α, β, γ) の集合を S とする。



次の可換図式 $(\alpha', \beta', \gamma')$ の集合を T とする。



随伴 $\mathcal{C}(P \times Q, R) \cong \mathcal{C}(P, R^Q)$ より、全単射 $S \rightarrow T; (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha', \beta', \gamma')$ が導かれる。

これは次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}(B \times B', Y) \times_{\mathcal{C}(C, Y)} \mathcal{C}(C, X) & \\
 & \nearrow^{g_* \times (f \nabla f')^*} & \downarrow \cong \\
 \mathcal{C}(B \times B', X) & & S \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \mathcal{C}(B, X^{B'}) & & T \\
 & \searrow_{(g^{\#f'})_* \times f^*} & \uparrow \cong \\
 & \mathcal{C}(B, Z) \times_{\mathcal{C}(A, Z)} \mathcal{C}(A, X^{B'}) &
 \end{array}$$

□

デカルト閉モデル圏

モデル圏がデカルト閉ならば、以下の compatibility が重要である。

補題 C.4.3. モデル圏 \mathcal{C} がデカルト閉であったとする。このとき、以下は同値である。

- 二つの任意の余束 f と f' に対し、 $f \nabla f'$ は余束である。さらに f または f' が非輪状ならば、 $f \nabla f'$ も非輪状である。
- 任意の余束 f と任意の束 g に対し、 $g^{\#f}$ は束である。さらに f または g が非輪状ならば、 $g^{\#f}$ も非輪状である。

証明. 命題 C.4.2 より明らか。 □

定義 C.4.4 (デカルト閉モデル圏). 補題 C.4.3 の性質を満たすモデル圏 \mathcal{C} をデカルト閉モデル圏と呼ぶ。

余束生成の場合

余束生成モデル圏 \mathcal{C} がデカルト閉であった場合、 \mathcal{C} がデカルト閉モデル圏であることは比較的簡単に確かめられる。

命題 C.4.5. モデル圏 \mathcal{C} がデカルト閉であったとする。さらに、 \mathcal{C} が余束生成であって、射の集合 I が余束を生成し、 J が非輪状余束を生成したとする。以下は同値である。

1. \mathcal{C} はデカルト閉モデル圏である。
2. 任意の $f, f' \in I$ に対し、 $f \nabla f'$ は余束である。さらに、任意の $f \in I$ と $f' \in J$ に対し、 $f \nabla f'$ は非輪状余束である。

証明. $1. \Rightarrow 2.$ は明らか。 $2. \Rightarrow 1.$ を示す。 $2.$ より、任意の $f, f' \in I$ と任意の非輪状束 g に対し、 $f \nabla f' \pitchfork g$ である。命題 C.4.2 より、 $f \pitchfork g^{\#f'}$ である。よって、任意の $f' \in I$ と任意の非輪状束 g に対し、 $g^{\#f'}$ は束である。このとき、任意の余束 f に対し、 $f \pitchfork g^{\#f'}$ である。再び命題 C.4.2 より、 $f \nabla f' \pitchfork g$ である。以上より、任意の余束 f と任意の $f' \in I$ に対し、 $f \nabla f'$ は余束である。全く同様に、 f' も任意の余束としてよい。

また、任意の $f \in I$ と $f' \in J$ 、および任意の束 g に対し同様の議論を行うことで、任意の余束 f と任意の非輪状余束 f' に対し、 $f \nabla f'$ は非輪状余束である。よって \mathcal{C} はデカルト閉モデル圏である。 \square

C.5 ホモトピー極限と正則モデル圏

\mathcal{C} をモデル圏とする。小さい圏 \mathcal{I} に対し、 $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ は定値関手を与える関手とする。 \mathcal{C} は完備かつ余完備なので、関手 Δ は右随伴 \lim_{\leftarrow} と左随伴 \lim_{\rightarrow} を持つ。仮に、関手圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ 上のモデル構造が存在し、随伴 $\Delta \dashv \lim_{\leftarrow} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ が Quillen 随伴であったとする。このとき、Quillen 随伴 $\Delta \dashv \lim_{\leftarrow}$ の導来随伴 $\mathbb{L}\Delta \dashv \mathbb{R}\lim_{\leftarrow} : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{I}})$ が得られる。(関手圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ 上のそのようなモデル構造は、 \mathcal{I} が Reedy 圏であれば存在するが、一般には存在するとは限らない。しかし関手圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ は一般に弱同値のクラスを持つ。ホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{I}})$ は弱同値のクラスによる局所化として定義できる。導来関手も Kan 拡張によって定義できる。) 上記の導来関手 $\mathbb{R}\lim_{\leftarrow}$ を (大域的) ホモトピー極限と呼ぶ。双対的に、(大域的) ホモトピー余極限 $\mathbb{L}\lim_{\rightarrow}$ が定義できる。

ここでは、ホモトピー極限の具体例として、ホモトピー積とホモトピー引き戻しを見る。ただし、この構成が実際にホモトピー極限を与えているかどうかは必ずしも触れない。ホモトピー積はホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の積であるが、ホモトピー引き戻しはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の引き戻しではない。なぜなら、ホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{I}})$ が関手圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})^{\mathcal{I}}$ と同値であるとは限らないからである。

最後に正則モデル圏を定義し、ホモトピー引き戻しとの関係を見る。

C.5.1 ホモトピー積

\mathcal{C} をモデル圏とし、そのモデル構造を $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ とする。集合 Λ に対し、圏 \mathcal{C}^{Λ} はモデル構造 $(W^{\Lambda}, \text{Fib}^{\Lambda}, \text{Cof}^{\Lambda})$ を持つ (cf. 命題 C.3.5)。このとき、定値関手を与える関手 $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\Lambda}$ は弱同値と束と余束を保つ。よって、二つの随伴 $\Delta \dashv \prod$ と $\prod \dashv \Delta$ は共に Quillen 随伴である。ここから導来随伴 $\mathbb{L}\Delta \dashv \mathbb{R}\prod$ と $\mathbb{L}\prod \dashv \mathbb{R}\Delta$ が得られる。 $\mathbb{R}\prod$ をホモトピー積と呼び、 $\mathbb{L}\prod$ をホモトピー余積と呼ぶ。

構成は双対なので、ホモトピー積 $\mathbb{R}\prod$ を計算してみよう。集合 Λ で添え字づけられた \mathcal{C} の対象族 $X_{\lambda} (\lambda \in \Lambda)$ をとる。束置換を与える関手 $Q' : \mathcal{C} \rightarrow \pi^1 \mathcal{C}_f$ を用いて、 \mathcal{C} の対象 $\prod_{\lambda} Q'(X_{\lambda})$ が定義できる。これがホモトピー積 $\mathbb{R}\prod_{\lambda} X_{\lambda}$ である。

ホモトピー積はホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の積である。これを示すため、まずはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^\Lambda)$ が冪圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})^\Lambda$ と圏同値であることを示す。まず、モデル圏の積の性質を調べる。

補題 C.5.1. \mathcal{C} はモデル圏、 Λ は集合とする。

1. 集合 Λ で添え字づけられた \mathcal{C} の射の族 $f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対し、以下は同値である。
 - 各 f_λ は \mathcal{C} 上で弱同値 (*resp.* 束、余束) である。
 - $(f_\lambda)_\lambda$ は \mathcal{C}^Λ 上で弱同値 (*resp.* 束、余束) である。
2. 集合 Λ で添え字づけられた \mathcal{C} の対象族 $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対し、以下は同値である。
 - 各 X_λ は \mathcal{C} 上で束対象 (*resp.* 余束) である。
 - $(X_\lambda)_\lambda$ は \mathcal{C}^Λ 上で束対象 (*resp.* 余束対象) である。
3. 集合 Λ で添え字づけられた \mathcal{C} の射の族 f_λ と $g_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対し、以下は同値である。
 - 各 λ に対し、 f_λ と g_λ は \mathcal{C} 上で左ホモトピック (*resp.* 右ホモトピック) である。
 - $(f_\lambda)_\lambda$ と $(g_\lambda)_\lambda$ は \mathcal{C}^Λ 上で左ホモトピック (*resp.* 右ホモトピック) である。

証明. 明らか。 □

よって次が成り立つ。

命題 C.5.2. \mathcal{C} はモデル圏、 Λ は集合とする。ホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^\Lambda)$ は冪圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})^\Lambda$ と圏同値である。さらに左導来関手 $\mathbb{L}\Delta : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C}^\Lambda)$ は定値関手を与える関手 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})^\Lambda$ と同値である。

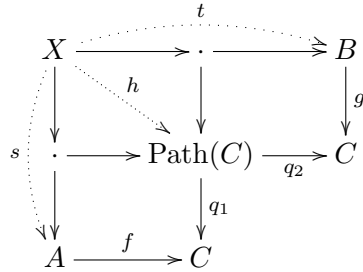
証明. 補題 C.5.1 より $\pi^r(\mathcal{C}^\Lambda)_c$ と $\pi^r\mathcal{C}_c^\Lambda$ は圏同値である。さらに $\pi(\mathcal{C}^\Lambda)_{fc}$ と $\pi\mathcal{C}_{fc}^\Lambda$ は圏同値である。これはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}^\Lambda)$ と冪圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})^\Lambda$ が圏同値であることを意味する。後半は左導来関手の構成から明らか。 □

C.5.2 ホモトピー引き戻し

\mathcal{C} 上で次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

C の非常に良い道対象 $\text{Path}(C)$ をとり、標準的な射 $\text{Path}(C) \rightarrow C \times C$ を $q_1 \times q_2$ と表す。次の図式の各四角が引き戻しになるように対象 X を定める。さらに、以下のように射の名前 s と t と h を付けておく。



このとき次の図式は引き戻しである。(こちらで定義してもよい。)

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & \text{Path}(C) \\
 s \times t \downarrow & & \downarrow q_1 \times q_2 \\
 A \times B & \xrightarrow{f \times g} & C \times C
 \end{array}$$

次の図式は可換ではないが、右ホモトピー h によって $f \circ s$ と $g \circ t$ は右ホモトピックである。すなわちホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の可換図式を導く。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{t} & B \\
 s \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

これを図式 $A \rightarrow C \leftarrow B$ のホモトピー引き戻しと呼び、上記の X を $A \times_C^h B$ などと書く。束 $\text{Path}(C) \rightarrow C \times C$ の引き戻しである $A \times_C^h B \rightarrow A \times B$ は束である。 A と B を束対象とすると、 $A \times B$ も束対象であるので、 X も束対象である。

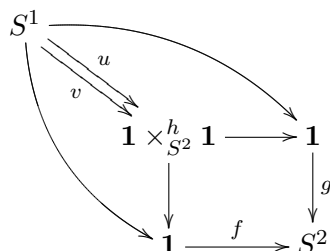
ホモトピー引き戻しはホモトピー極限であるが、これはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の引き戻しではない。実際、次の例がとれる。

例 C.5.3. 位相空間の圏 $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ の通常のモデル構造を考える。 $A = B = \mathbf{1}$ は一点集合とし、 $C = S^2$ は単位球面とする。 $f : \mathbf{1} \rightarrow S^2$ は北極点を、 $g : \mathbf{1} \rightarrow S^2$ は南極点を与える写像とする。二つの連続写像 $u, v : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^2$ を次で定める。

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= (\sqrt{1 - (2t - 1)^2}x, \sqrt{1 - (2t - 1)^2}y, 2t - 1) \\
 v(x, y, t) &= (0, \sqrt{1 - (2t - 1)^2}, 2t - 1)
 \end{aligned}$$

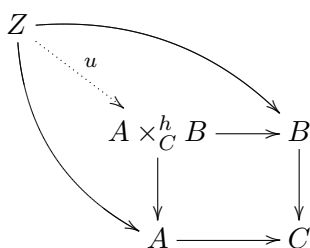
u と v はともに連続写像 $\hat{u}, \hat{v} : S^1 \rightarrow \mathbf{1} \times_{S^2}^h \mathbf{1}$ を与える。一点集合と n -次元球面 S^n は CW

複体なので、特に余束対象である。よって $\pi\mathbf{Top}_{fc}$ 上の次の図式が得られる。



u と v は $t=0,1$ を止めたホモトピーで移り合わないので、 \hat{u} と \hat{v} はホモトピックでない。よって、上記の図式を可換にする射 $S^1 \rightarrow \mathbf{1} \times_{S^2}^h \mathbf{1}$ はただ一つではない。すなわちホモトピー引き戻しはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上で引き戻しの普遍性を満たさない。

上の例のように、ホモトピー引き戻しは普遍性を満たさないため、引き戻しではない。しかし、ホモトピー引き戻しは弱普遍性を満たし、弱引き戻しと呼ばれる。すなわち、ホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の次の実線の可換図式に対し、ただ一つとは限らない射 u で図式の全てを可換にするものが存在する。



命題 C.5.4. 束対象からなる図式のホモトピー引き戻しはホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の弱引き戻しである。

証明. 束対象からなる図式 $A \rightarrow C \leftarrow B$ および C の非常に良い道対象 $\text{Path}(C)$ をとり、次のホモトピー引き戻し図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} A \times_C^h B & \xrightarrow{t} & B \\ s \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

上記の図式は圏 $\pi^l\mathcal{C}_f$ 上の図式と見做せる。余束置換を与える関手 $P' : \pi^l\mathcal{C}_f \rightarrow \pi\mathcal{C}_{fc}$ による像が $\pi\mathcal{C}_{fc}$ 上の弱引き戻し図式であることを示せばよい。すなわち、束対象かつ余束対象である任意の対象 Z に対し、次の写像が全射であることを示せばよい。

$$\pi(Z, P'(X)) \xrightarrow{P'(s)_* \times P'(t)_*} \pi(Z, P'(A)) \times_{\pi(Z, P'(C))} \pi(Z, P'(B))$$

関手 P' は包含関手 $U : \pi\mathcal{C}_{fc} \rightarrow \pi^l\mathcal{C}_f$ の右随伴関手である。よって次の可換図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \pi(Z, P'(X)) & \xrightarrow{P'(s)_* \times P'(t)_*} & \pi(Z, P'(A)) \times_{\pi(Z, P'(C))} \pi(Z, P'(B)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi^l(U(Z), X) & \xrightarrow{s_* \times t_*} & \pi^l(U(Z), A) \times_{\pi(U(Z), C)} \pi(U(Z), B) \end{array}$$

よって、 $s_* \times t_*$ が全射であることを示せばよい。

任意の $([s'], [t']) \in \pi^l(U(Z), Y') \times_{\pi(U(Z), Y)} \pi(U(Z), X)$ は圏 $\pi^l\mathcal{C}_f$ 上で次の可換図式を与える。($U(Z) = Z$ に注意する。)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{t'} & B \\ \downarrow s' & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$\pi^l\mathcal{C}_f$ 上で可換とは、 $f \circ t'$ が $g \circ s'$ に左ホモトピックであることを意味する。 Z は余束対象だから、命題 C.2.21 の 1. より $f \circ s'$ は $g \circ t'$ に右ホモトピックである。命題 C.2.21 の 2. より、 $f \circ s'$ から $g \circ t'$ への非常に良い右ホモトピー $H : Z \rightarrow \text{Path}(C)$ が存在する。(命題 C.2.11 の 3.(の双対) より H の始域は所与の (非常に) 良い道対象 $\text{Path}(C)$ としてよい。) 次の可換図式と引き戻しの普遍性により、射 $u : Z \rightarrow X$ が得られる。

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow u & & \searrow H & \\ & X & \xrightarrow{h} & \text{Path}(C) & \\ & \downarrow s \times t & & \downarrow q_1 \times q_2 & \\ & A \times B & \xrightarrow{f \times g} & C \times C & \end{array}$$

これは $s_* \times t_*([u]) = ([s'], [t'])$ を満たす。以上より $s_* \times t_*$ が全射であることが示された。

よってホモトピー引き戻し $A \times_C^h B$ がホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上の弱引き戻しであることが示された。 □

束に沿った (通常の) 引き戻しはホモトピー引き戻しである。これを示すため、次の補題を用意する。

補題 C.5.5. 以下の図式はモデル圏 \mathcal{C} 上の束対象からなる引き戻し図式とする。

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{t} & B \\ \downarrow s & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

射 f が束かつ射 g が弱同値ならば、射 s は弱同値である。

証明.

□

束対象からなる図式 $A \rightarrow C \leftarrow B$ に対し、通常の引き戻し $A \times_C B$ と、ホモトピー $A \times_C^h B$ をとることができる。さらに、標準的な射 $A \times_C B \rightarrow A \times_C^h B$ が存在する。

命題 C.5.6. A と B と C が束対象であり、射 $A \rightarrow C$ が束ならば、標準的な射 $A \times_C B \rightarrow A \times_C^h B$ は弱同値である。

証明. $g : B \rightarrow C$ の分解 $B \xrightarrow{i} B' \xrightarrow{p} C$ で、 i が非輪状余束かつ p が束であるものをとる。次の図式の各四角は引き戻しである。

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times_C B & \longrightarrow & A \times_C B' & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \times_C^h B & \longrightarrow & A \times_C^h B' & \longrightarrow & \text{Path}(C) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \times B & \xrightarrow{id_A \times i} & A \times B' & \xrightarrow{f \times p} & C \times C
 \end{array}$$

束対象の間の弱同値の積は弱同値だから、 $id_A \times i$ は弱同値である。 f と g が束であることから、 $f \times p$ は束である。また、 $\text{Path}(C)$ は C の (非常に) 良い道対象だから、 $C \rightarrow \text{Path}(C)$ は弱同値であり、 $\text{Path}(C) \times C \times C$ は束である。束の引き戻しは束だから、補題 C.5.5 より、 $A \times_C^h B \rightarrow A \times_C^h B'$ と $A \times_C B' \rightarrow A \times_C^h B'$ は弱同値である。さらに、 f が束であること及び次の図式と補題 C.5.5 より、 $A \times_C B \rightarrow A \times_C B'$ は弱同値である。

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_C B & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow i \\
 A \times_C B' & \longrightarrow & B' \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

以上より次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_C B & \xrightarrow{\simeq} & A \times_C B' \\
 \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 A \times_C^h B & \xrightarrow{\simeq} & A \times_C^h B'
 \end{array}$$

よって、 $A \times_C B \rightarrow A \times_C^h B$ は弱同値である。

□

C.5.3 正則モデル圏

モデル圏の正則性を定義する。

定義 C.5.7 (正則モデル圏). モデル圏 \mathcal{C} が右正則であるとは、任意の束に沿った任意の弱同値の引き戻しが再び弱同値になることを言う。モデル圏 \mathcal{C} が左正則であるとは、任意の余束に沿った任意の弱同値の押し出しが再び弱同値になることを言う。モデル圏 \mathcal{C} が右正則かつ左正則であるとき、 \mathcal{C} は正則であると言う。

全ての対象が束対象ならば、モデル圏は常に右正則である。これは既に示してある。

命題 C.5.8. モデル圏 \mathcal{C} の全ての対象が束対象ならば、 \mathcal{C} は右正則である。

証明. 補題 C.5.5 より明らか。 □

一般のモデル圏に対し、正則性は次のように特徴づけられる。(結果は双対なので、右正則性についてのみ述べる。)

命題 C.5.9. モデル圏 \mathcal{C} に対し、以下は同値である。

1. \mathcal{C} は右正則である。
2. \mathcal{C} 上の任意の束に沿った引き戻しはホモトピー引き戻しである。 *i.e.* \mathcal{C} 上の以下の引き戻し図式について、 f が束ならば、標準的な射 $X' \rightarrow Y' \times_Y^h X$ は弱同値である。

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

証明. 2. \Rightarrow 1. は明らか。

1. \Rightarrow 2. を示す。次の図式は \mathcal{C} 上の引き戻しで、 f は束とする。

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

この図式がホモトピー引き戻しであることを示せばよい。

Case.1. Y が束対象の場合。

g を非輪状余束と束の合成 $Y' \xrightarrow{\cong} Y'' \rightarrow Y$ に分解する。次の図式の全ての四角が引き戻しであるように、対象 X'' をとる。

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\cong} & Y'' & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & g & & \end{array}$$

X と Y と Y'' は全て束対象だから、命題 C.5.6 より、上の図式の右の四角はホモトピー引き戻しを与える。また、束の引き戻しは束だから真ん中の射 $X'' \rightarrow Y''$ は束である。よって 1. より、 $X' \rightarrow Y'$ は $X'' \rightarrow Y''$ とホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上で同型である。以上より、始めの図式がホモトピー図式であることが示された。

Case.2. 一般の場合。

まず Y の束置換 $e : Y \rightarrow \hat{Y}$ をとる。また、 $e \circ g : Y' \rightarrow \hat{Y}$ を非輪状余束 i と束 p の合成 $Y' \xrightarrow{i} Y'' \xrightarrow{p} \hat{Y}$ に分解する。すなわち $e \circ g = p \circ i$ である。次の図式の全ての四角が引き戻しであるように、対象 A と B をとる。

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 A & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \simeq e \\
 Y'' & \xrightarrow{p} & \hat{Y}
 \end{array}$$

引き戻しの普遍性より、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\
 Y' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Y \\
 \searrow \simeq i & & \downarrow & & \downarrow \simeq e \\
 & & Y'' & \xrightarrow{p} & \hat{Y}
 \end{array}$$

図式の小さい四角はすべて引き戻しである。 \hat{Y} は束対象で、 p は束だから、Case.1. より右の大きい四角はホモトピー p -引き戻しである。また 1. より右下の四角はホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上で同型である。よって、右上の四角もホモトピー引き戻しである。 p は束で e は弱同値だから、1. より $A \rightarrow Y''$ は弱同値である。よって、 i が弱同値であることとより、 $Y' \rightarrow A$ は弱同値である。束の引き戻しは束だから、 $B \rightarrow A$ は束である。よって 1. より左上の四角もホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 上で同型である。よって上の大きい四角もホモトピー引き戻しである。以上より、始めの図式がホモトピー引き戻しであることが示された。 \square

C.6 混合モデル圏

与えられた圏 \mathcal{C} が二つのモデル構造を持っているとき、これらを混合して新しいモデル構造を得たい時がある。特殊な場合にはこれが可能である。

定理 C.6.1 (M. Cole [3]). \mathcal{C} を圏とする。 $(W, \text{Fib}, \text{Cof})$ と $(W', \text{Fib}', \text{Cof}')$ は \mathcal{C} 上のモデル構造とする。さらに、次を満たすとする。

- $W \subset W'$
- $\text{Fib} \subset \text{Fib}'$

このとき、 W' を弱同値、 Fib を束のクラスとする \mathcal{C} 上のモデル構造が存在する。

証明. $\text{Cof}'' = \text{lp}(\text{Fib} \cap W')$ とする。まず、関係 $\text{Cof}' \pitchfork \text{Fib}' \cap W'$ と $\text{Fib} \subset \text{Fib}'$ より、関係 $\text{Cof}' \pitchfork \text{Fib} \cap W'$ が成り立つ。よって $\text{Cof}' \subset \text{Cof}''$ である。また、包含関係 $W \subset W'$ より関係 $\text{Cof}'' \pitchfork \text{Fib} \cap W$ が成り立つ。よって $\text{Cof}'' \subset \text{Cof}$ である。以上より $\text{Cof}' \subset \text{Cof}'' \subset \text{Cof}$ であることに注意する。

$(W'', \text{Fib}, \text{Cof}'')$ がモデル構造であることを示す。モデル圏の特徴づけ (命題 C.2.4) の条件を確かめる。

1. 三つの射 f, g および $g \circ f$ のうち二つが W' に含まれるならば、残りの一つも W に含まれる。

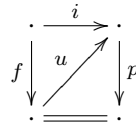
元のモデル構造の公理より明らか。

2. $W', \text{Fib}, \text{Cof}''$ はそれぞれレトラクトについて閉じている。

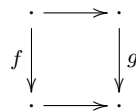
W' と Fib については元のモデル構造の公理より明らか。 Cof'' については、リフト性質がレトラクトについて閉じていることから従う。

3. $\text{Cof}'' \cap W' \pitchfork \text{Fib}$ かつ $\text{Cof}'' \pitchfork \text{Fib} \cap W'$ である。

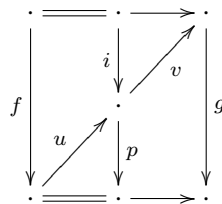
$\text{Cof}'' \pitchfork \text{Fib} \cap W'$ は Cof'' の定義より明らか。 $\text{Cof}'' \cap W' \pitchfork \text{Fib}$ を示す。任意の $f \in \text{Cof}'' \cap W'$ と任意の $g \in \text{Fib}$ をとる。分解 $f = p \circ i$ で、 $p \in \text{Fib}$ かつ $i \in \text{Cof} \cap W$ を満たすものをとる。 $W \subset W'$ より、 $i \in W'$ である。 $f \in W'$ とより、 $p \in W'$ である。 $p \in \text{Fib} \cap W'$ より、次の図式のリフト u が存在する。



$f \pitchfork g$ を示すため、次の図式を考える。



この図式を次のように分解すると、 $i \pitchfork g$ より下図のリフト v が存在する。



これは $f \pitchfork g$ を意味する。以上より $\text{Cof}'' \cap W' \pitchfork \text{Fib}$ であることが示された。

4. 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f = p'_f \circ i'_f$ なる二つの (関手的) 分解で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in \text{Cof}'' \cap W'$, $p'_f \in \text{Fib} \cap W'$, $i'_f \in \text{Cof}''$ となるものが存在する。

二つの分解 $f = p_f \circ i_f = p' \circ i'$ で、 $p_f \in \text{Fib}$, $i_f \in \text{Cof} \cap W$, $p' \in \text{Fib}' \cap W'$, $i' \in \text{Cof}'$ を満たすものをとる。

$\text{Cof} \cap W \supset \text{Fib}$ より、 $\text{Cof} \cap W \supset \text{Fib} \cap W'$ である。よって $\text{Cof} \cap W \subset \text{Cof}''$ である。よって $i_f \in \text{Cof}''$ である。以上より、一つ目の分解 $f = p_f \circ i_f$ は条件を満たす。

二つ目の分解を作る。 $\text{Cof}' \subset \text{Cof}''$ より、 $i' \in \text{Cof}''$ である。次に、分解 $p' = p'_f \circ i''$ で、 $p'_f \in \text{Fib}$, $i'' \in \text{Cof} \cap W$ を満たすものをとる。 $W \subset W'$ より、 $i'' \in W'$ である。 $p' \in W'$ とより、 $p'_f \in W'$ である。再び $\text{Cof} \cap W \subset \text{Cof}''$ より $i'' \in \text{Cof}''$ である。 $i'_f = i' \circ i''$ と置くと、 $i'_f \in \text{Cof}''$ である。以上より、分解 $f = p'_f \circ i'_f$ は条件を満たす。 \square

命題 C.6.2. 定理 C.6.1 の状況で、モデル構造 $(W', \text{Fib}', \text{Cof}')$ は右正則とする。このとき、定理 C.6.1 によって得られる混合モデル構造は右正則である。

証明.

\square

付録D Lie 群

D.1 位相群

D.1.1 位相群

D.1.2 分類空間

D.2 Lie 群

付録E 園

関連図書

- [1] D. W. Anderson. Fibrations and geometric realizations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(5):765–788, 09 1978.
- [2] Kenneth S. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 186:419–458, 1973.
- [3] Michael Cole. Mixing model structures. *Topology and its Applications*, 153(7):1016–1032, 2006.
- [4] Yakov Eliashberg and Nikolai M Mishachev. *Introduction to the h-principle*. Number 48. American Mathematical Soc., 2002.
- [5] P Frejlich. *h-principles around Poisson geometry*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Instituto Superior Tecnico, 2011.
- [6] Hans Grauert. Analytische faserungen über holomorph-vollständigen räumen. *Mathematische Annalen*, 135(3):263–273, Jun 1958.
- [7] M Gromov. A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities. *Intern. Congr. Math.(Nice 1970)*, 2:221–225, 1971.
- [8] Misha Gromov. *Partial differential relations*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] André Haefliger. Groupoides d’holonomie et classifiants. In *Structure transverse des feuilletages*, number 116 in Astérisque, pages 70–97. Société mathématique de France, 1984.
- [10] Morris W Hirsch. Immersions of manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(2):242–276, 1959.
- [11] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Number 99. American Mathematical Soc., 2009.
- [12] Mark Hovey. *Model categories*. Number 63. American Mathematical Soc., 2007.

- [13] Ivan Kolár, Jan Slovák, and Peter W Michor. Natural operations in differential geometry. 1999.
- [14] Finnur Lárusson. Excision for simplicial sheaves on the stein site and gromov’s oka principle. *International Journal of Mathematics*, 14(02):191–209, 2003.
- [15] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] John Nash. C1 isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, pages 383–396, 1954.
- [17] John Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, pages 20–63, 1956.
- [18] Kiyosi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III–Deuxième problème de Cousin. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series A (Mathematics, Physics, Chemistry)*, 9(none):7 – 19, 1939.
- [19] Anthony Phillips. Submersions of open manifolds. *Topology*, 6(2):171–206, 1967.
- [20] Anthony Phillips. Foliations of open manifolds, i. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 43(1):204–211, 1968.
- [21] Anthony Phillips. Foliations on open manifolds, ii. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 44(1):367–370, 1969.
- [22] Daniel G Quillen. *Homotopical algebra*, volume 43. Springer, 2006.
- [23] Andrei Radulescu-Banu. Cofibrations in homotopy theory. *arXiv preprint math/0610009*, 2006.
- [24] G Sardanashvily. Fibre bundles, jet manifolds and lagrangian theory. lectures for theoreticians. *arXiv preprint arXiv:0908.1886*, 2009.
- [25] Dannie J Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142. Cambridge University Press, 1989.
- [26] Stephen Smale. The classification of immersions of spheres in euclidean spaces. *Annals of mathematics*, pages 327–344, 1959.
- [27] Stephen Smale. A classification of immersions of the two-sphere. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90(2):281–290, 1959.
- [28] Edwin Spanier et al. Quasi-topologies. *Duke Mathematical Journal*, 30(1):1–14, 1963.

- [29] Luca Studer. A homotopy theorem for oka theory. *Mathematische Annalen*, 378(3):1533–1553, 2020.
- [30] Reiner M Vogt. The help-lemma and its converse in quillen model categories. *arXiv preprint arXiv:1004.5249*, 2010.