

Fibration structure for Gromov's h-principle

Koji Yamazaki

Tokyo Institute of Technology

January 16, 2021

Gromov のホモトピー原理

… Hirsch-Smale のホモトピー原理の一般化
鍵は以下の定理

定理 (Gromov [3])

擬位相空間に値を持つ多面体上の層は、*flexible* ならばパラメトリック・ホモトピー原理を満たす。

- 開多様体上のホモトピー原理
- micro extension theorem

定義

擬位相空間に値を持つ層 \mathcal{F} が **パラメトリック・ホモトピー原理を満たす**とは、 $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ が **objectwise** に弱ホモトピー同値（すなわち、すべての $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^*(U)$ が弱ホモトピー同値）となることである。

\mathcal{F}^* : \mathcal{F} の形式的切断の層

Δ : 対角射

定理は次の二つの性質から直ちに従う

命題

- ① \mathcal{F}^* は flexible である。
- ② $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱ホモトピー同値 (すなわち、すべての $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^*$ が弱ホモトピー同値) である。

命題

\mathcal{F}, \mathcal{G} が flexible で、 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が stalkwise に弱ホモトピー同値ならば、 f は objectwise に弱ホモトピー同値である。

$\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ を **fibrant 置換** として解釈できないか？
→ **モデル圏** の言葉を使いたい。

定義 0.1 (モデル圏 [4])

圏 \mathcal{C} がモデル圏 (model category) であるとは、完備かつ余完備であって、三種の射のクラス $W, Fib, Cof \subset Mor(\mathcal{C})$ についていくつかの公理を満たしたものである。

$f \in W$ であるとき、 f は弱同値 (weak equivalence) であるという。

$f \in Fib$ であるとき、 f は束 (fibration) であるという。

$f \in Cof$ であるとき、 f は余束 (cofibration) であるという。

$f \in W \cap Fib$ であるとき、 f は自明な束 (trivial fibration) または非輪状束 (acyclic fibration) であるという。

$f \in W \cap Cof$ であるとき、 f は自明な余束 (trivial cofibration) または非輪状余束 (acyclic cofibration) であるという。

例 0.2

$\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ (位相空間の圏) とする。

- $Fib = \{\text{Serre 束}\}$
- $Cof = \{\text{Serre 束に対して左リフト性質を持つ}\}$
- $W = \{\text{弱ホモトピー同値}\}$

とすると、 \mathbf{Top} は (余束生成) モデル圏の構造を持つ。

例 0.3

$\mathcal{C} = \mathbf{sSet}$ (単体的集合の圏) とする。

- $Fib = \{\text{Kan 束}\}$
- $Cof = \{\text{単射}\}$
- $W = \{\text{幾何学的実現が弱ホモトピー同値}\}$

とすると、 \mathbf{sSet} は (余束生成) モデル圏の構造を持つ。

定義 0.1 (モデル圏の公理)

- $f, g, f \circ g$ のうち二つが弱同値なら、残りの一つも弱同値である。
- 射 i は非輪状余束 (resp. 余束) の時かつその時に限り任意の束 (resp. 非輪状束) p に対して左リフト性質を持つ。
すなわち、下のような任意の可換図式に対して、斜めの射 h が存在してすべての図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

射 p は非輪状束 (resp. 束) の時かつその時に限り任意の余束 (resp. 非輪状余束) i に対して右リフト性質を持つ。

- 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f = p'_f \circ i'_f$ なる二つの関手的分解で、 p_f と p'_f が束、 i_f と i'_f が余束、さらに i_f と p'_f が非輪状となるものが存在する。

定義 0.2 (fibrant 対象と fibrant 置換)

終対象を $\mathbf{1}$ と表す。

モデル圏の対象 x が**束対象 (fibrant object)** であるとは、唯一つの射 $x \rightarrow \mathbf{1}$ が **fibration** となることである。

モデル圏の対象 x の**束置換 (fibrant replacement)** または**束分解 (fibrant resolution)** とは、束対象 y と弱同値 $x \rightarrow y$ の組のことである。

束対象や束置換は、その双対である余束対象や余束置換とともに、モデル圏の**ホモトピー圏の射を計算するために重要である**。

定義 0.3 (ホモトピー圏)

モデル圏 \mathcal{C} の弱同値のクラスを W とする。

\mathcal{C} の W による局所化 \mathcal{C}/W のことを \mathcal{C} の**ホモトピー圏** と呼ぶ。

擬位相空間に値を持つ位相空間 B 上の層の圏を $Sh(B; \mathbf{qTop})$ と書く。
 B は適切な公理を満たすとする。(e.g. 多面体)

問題

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上のモデル構造で、次を満たすものが存在するか？

- f が弱同値 $\Leftrightarrow f$ が stalkwise に弱ホモトピー同値
- \mathcal{F} が fibrant $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が flexible

→ 二通りの解答が与えられる

B は適切な公理を満たす位相空間とする。

定理 0.4 (Y.)

ある圏 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の (右正則な) モデル構造および充満忠実かつ有限極限を保つ埋め込み $Sh(B; \mathbf{qTop}) \hookrightarrow PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ で、次を満たすものが存在する。

- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f が $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上で弱同値 $\Leftrightarrow f$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値
- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の対象 \mathcal{F} が $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上で *fibrant* $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が *flexible*

定理 0.5 (Y.)

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の *ABC prefibration* 構造で、次を満たすものが存在する。

- f が弱同値 $\Leftrightarrow f$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値
- \mathcal{F} が *fibrant* $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が *flexible*

- 1939 岡の原理
- 1954 Nash の埋め込み定理
- 1959 Hirsch-Smale のホモトピー原理
- 1967 Quillen のモデル圏 [5]
- 1970 Gromov のホモトピー原理 [2]
- 1973 fibrant 対象の圏 (Brown)
- 2006 ABC (co)fibration 圏 (Radulescu-Banu) [6]

定義 1.1

Sing Δ は次のデータからなる圏とする。

- 対象：単体の閉部分集合
- 射：連続写像

Sing Δ には有限閉被覆を被覆としてグロタンディーク位相が定まる。

定義 1.2 (Gromov [3], Y.)

Sing Δ 上の (集合に値を持つ) 前層を (Gromov の) 前擬位相空間と呼ぶ。
Sing Δ 上の層を (Gromov の) 擬位相空間 (quasitopological space) と呼ぶ。
前擬位相空間の圏を **pqTop** と書き、擬位相空間の圏を **qTop** と書く。

位相空間の圏を **Top** と書き、単体的集合の圏を **sSet** と書く。
次の随伴の列を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{G_0} & & \xleftarrow{G_1} & & \xleftarrow{G_2} & & \\ \mathbf{sSet} & \top & \mathbf{pqTop} & \top & \mathbf{qTop} & \top & \mathbf{Top} & \\ & \xrightarrow{F_0} & & \xrightarrow{F_1} & & \xrightarrow{F_2} & & \end{array}$$

G_0, G_1 は包含関手。 G_2 は特異集合を与える関手。
 F_1 は層化。 F_0, F_2 は“幾何学的実現”と同様に構成できる。(Kan 拡張の一般論)

余束生成 (cofibrantly generated) モデル圏の推移定理 [4] より、**pqTop** および **qTop** 上にモデル構造が定まる。

さらに、先ほどの随伴はすべて Quillen 同値である。

ただし、実用的な部分では **pqTop** は **sSet** に近く、**qTop** は **Top** に近い。例えば、 $\Delta^n \cup_{\partial\Delta^n} \Delta^n \cong \partial\Delta^{n+1}$ は **qTop** 上では成り立つが、**pqTop** 上では成り立たない。

この事情により、**pqTop** 上の弱同値および fibration は **sSet** と同様の複雑な定義を必要とするが、**qTop** 上の弱同値および fibration は **Top** と全く同様に定義できる。

特に、**qTop** は **デカルト閉モデル圏** であること、および任意の擬位相空間が **qTop** 上の束対象であることが容易にわかる。

デカルト閉モデル圏

定義 1.3 (デカルト閉モデル圏)

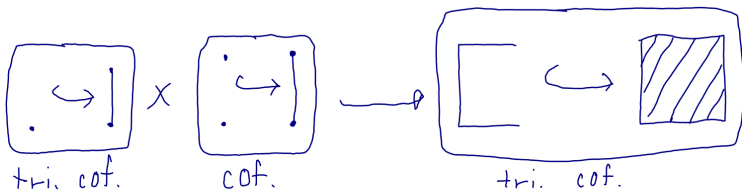
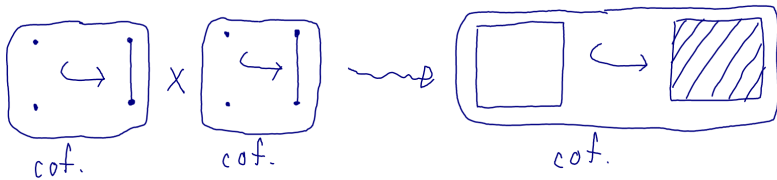
デカルト閉モデル圏とは、デカルト閉 (つまり有限積と冪対象を持つ) であるモデル圏であって、次を満たすものである。

- $f : A \rightarrow B$ と $f' : A' \rightarrow B'$ が余束であったならば、次の射 μ も余束である。
さらに、 f か f' のどちらかが非輪状ならば、 μ も非輪状である。

$$\begin{array}{ccc} & & B \times B' \\ & \text{id} \times f' \nearrow & \\ B \times A' & \longrightarrow & B \times A' \amalg_{A \times A'} A \times B' \\ \uparrow f \times \text{id} & & \uparrow \\ A \times A' & \xrightarrow{\text{id} \times f'} & A \times B' \end{array}$$

The diagram shows a commutative square with a diagonal arrow. The top-left node is $B \times A'$, the top-right node is $B \times B'$, the bottom-left node is $A \times A'$, and the bottom-right node is $A \times B'$. The middle node is $B \times A' \amalg_{A \times A'} A \times B'$. Arrows are: $B \times A' \rightarrow B \times B'$ labeled $\text{id} \times f'$; $A \times A' \rightarrow A \times B'$ labeled $\text{id} \times f'$; $A \times A' \rightarrow B \times A'$ labeled $f \times \text{id}$; $A \times B' \rightarrow B \times B'$ labeled $f \times \text{id}$; $A \times A' \rightarrow B \times A' \amalg_{A \times A'} A \times B'$ labeled $\text{id} \times f'$; $A \times B' \rightarrow B \times A' \amalg_{A \times A'} A \times B'$ labeled $f \times \text{id}$; and a diagonal arrow from $B \times A' \amalg_{A \times A'} A \times B'$ to $B \times B'$ labeled μ .

デカルト閉モデル圏のイメージ



定義 1.4

\mathbf{qTop} に値を持つ位相空間 B 上の層 \mathcal{F} が可撓 (flexible) であるとは、任意のコンパクト集合の組 $K \subset L \subset B$ に対し、制限射 $\mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ が (\mathbf{qTop} 上の) fibration になることである。

(ただし、 $\mathcal{F}(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{F}(U)$)

これが fibrant となるように fibration を定義したい。

flexible 拡張 ($Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の fibration)

\mathbf{qTop} に値を持つ位相空間 B 上の層の圏を $Sh(B; \mathbf{qTop})$ と書く。

定義 1.5

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が可撓拡張 (flexible extension) であるとは、任意のコンパクト集合の組 $K \subset L \subset B$ に対し、次の射 $f_{K \subset L}$ が (\mathbf{qTop} 上の) fibration になることである。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(L) & \xrightarrow{f_L} & \mathcal{G}(L) \\ & \searrow^{f_{K \subset L}} & \\ & \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) & \longrightarrow \mathcal{G}(L) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{f_K} \mathcal{G}(K) \end{array}$$

$f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が可撓拡張であるという条件を、次のように表したい。

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が可撓拡張 (flexible extension) であるとは、任意のコンパクト集合の組 $K \subset L \subset B$ および \mathbf{qTop} 上の任意の trivial cofibration $X \rightarrow Y$ に対し、次の図式がリフトを持つことである。

$$\begin{array}{ccc} X_L \amalg_{X_K} Y_K & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y_L & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

ただし、 X_K とは “ K 上で X をとる定数層の零延長” としたいが、このような対象は $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上で定義できない。

B は位相空間とする。

$\tilde{\mathcal{U}}_B$ は次のデータからなる圏とする。

- 対象： B の閉集合と開集合の共通部分
- 射：包含関係

$\tilde{\mathcal{U}}_B$ 上の前層の圏 $PSh(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ を考えれば X_K を定義することができる。

$$X_K(U) = \begin{cases} \emptyset & (U \not\subset K) \\ X & (U \subset K) \end{cases}$$

技術的な理由から以下の仮定を加える。

定義 2.1 (Y.)

添加前層とは、前層 \mathcal{F} であって、始対象 \emptyset に対して終対象 $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathbf{1}$ を対応させるものとする。

X_K の定義を以下のように修正する。

$$X_K(U) = \begin{cases} \emptyset & (U \not\subset K) \\ X & (\emptyset \neq U \subset K) \\ \mathbf{1} & (U = \emptyset). \end{cases}$$

圏 \mathcal{C} に値を持つ圏 \mathcal{U} 上の添加前層の圏を $PSh_*(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ と書く。
 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ について考察する。

次の定理を示す。

定理 2.2 (Y.)

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の (右正則な) モデル構造および充満忠実かつ有限極限を保つ埋め込み $Sh(B; \mathbf{qTop}) \hookrightarrow PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ で、次を満たすものが存在する。

- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の射 f が $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上で弱同値 $\Leftrightarrow f$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値
- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の対象 \mathcal{F} が $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上で *fibrant* $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が *flexible*

このモデル構造は、後に定義する **各点可撓モデル構造** である。

モデル構造の存在定理

モデル構造の存在を直接示すのは容易ではない。
次の定理が知られている。(余束生成モデル圏の定義でもある。)

定理 2.3 (認知 (recognition) 定理 [4])

圏 \mathcal{C} が完備かつ余完備であって、次を満たす射のクラス $W \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ および二つの射の (小さい) 集合 $I, J \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ が存在したとする。

(ただし、 $\text{Cof}(I) = \{I\text{-相対セル複体のレトラクト}\}$ とし、 $\text{rlp}(I) = \{I \text{ に対して右リフト性質を満たす}\}$ とする。)

- $\text{Cof}(J) \subset W \cap \text{Cof}(I)$ である。
- $\text{rlp}(I) = \text{rlp}(J) \cap W$ である。
- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。
- I および J は小対象引数を許容する。

このとき、 W を弱同値、 $\text{Cof}(I)$ を *cofibration*、 $\text{rlp}(J)$ を *fibration* として、 \mathcal{C} は余束生成モデル圏の構造を持つ。

例 2.4

$\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ とする。

- $I = \{\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n\}$
- $J = \{\Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]\}$
- $W = \{\text{弱ホモトピー同値}\}$

とすると、 \mathbf{Top} は余束生成モデル圏の構造を持つ。

コンパクト可撓モデル構造

定理 2.5 (コンパクト可撓モデル構造)

$PSh_*(\mathcal{U}_B; \mathbf{qTop})$ 上のモデル構造であって、次を満たすものが存在する。

- 射 f が弱同値 $\Leftrightarrow f_K : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ が弱同値 (for コンパクト集合 K)
- 射 f が *fibration* $\Leftrightarrow f$ が可撓拡張

このモデル構造を **コンパクト可撓モデル構造** と呼ぶ。

証明

- $I = \{(\partial\Delta^n)_L \amalg_{(\partial\Delta^n)_K} \Delta_K^n \rightarrow \Delta_L^n \mid K \subset L \subset B \text{ はコンパクト}, n\}$
- $J = \{\Delta_L^n \amalg_{\Delta_K^n} (\Delta^n \times [0, 1])_K \rightarrow (\Delta^n \times [0, 1])_L \mid K \subset L \subset B \text{ はコンパクト}, n\}$
- $W = \{f \mid f_K : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K) \text{ が弱同値 (for コンパクト集合 } K)\}$

とする。このとき、 $rlp(J) = \{\text{可撓拡張}\}$ である。

認知定理の条件を確かめればよい。

- $Cof(J) \subset W \cap Cof(I)$ である。

まず、 J の各元は I を貼り合わせて得られる(I -相対セル複体である)ので、 $Cof(J) \subset Cof(I)$ である。

擬位相空間 X に対し、 $X_K = X_B \times \mathbf{1}_K$ である。

\mathbf{qTop} 上で、 $\Delta^n \rightarrow \Delta^n \times [0, 1]$ は非輪状 cofibration であり、 $\mathbf{1}_K \rightarrow \mathbf{1}_L$ は objectwise に cofibration である。

\mathbf{qTop} はデカルト閉なので、 J の各元は objectwise に非輪状 cofibration である。

よって、 $Cof(J)$ の各元は objectwise に非輪状 cofibration であるので、特に $Cof(J) \subset W$ である。

- $rlp(I) \subset rlp(J) \cap W$ である。

$$\begin{aligned} f \in rlp(I) &\Leftrightarrow f_{K \subset L} \text{は非輪状 fibration} \\ &\Rightarrow f_{K \subset L} \text{は fibration} \\ &\Leftrightarrow f \in rlp(J) \end{aligned}$$

また特に、(添加前層を考えているため) $f_{\emptyset \subset K} = f_K : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ も非輪状 fibration なので、これは弱同値である。

よって $rlp(I) \subset rlp(J) \cap W$ である。

コンパクト可撓モデル構造

- $rlp(I) \supset rlp(J) \cap W$ である。

逆に $f \in rlp(J) \cap W$ とする。

次の図式の f_L および \tilde{f}_K が非輪状 fibration なので、 $f_{K \subset L}$ は弱同値である。
 $f_{K \subset L}$ は fibration としてとっているのので、非輪状 fibration である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(L) & & & & \\ & \searrow^{f_L} & & & \\ & & \mathcal{F}(K) \times_{\mathcal{G}(K)} \mathcal{G}(L) & \xrightarrow{\tilde{f}_K} & \mathcal{G}(L) \\ & \searrow^{f_{K \subset L}} & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{f_K} & \mathcal{G}(K) \end{array}$$

- $f, g, f \circ g$ のうち二つが W に含まれるなら、残りの一つも W に含まれる。

明らか。

- I および J 小対象引数を許容する。

略。(それほど難しくない。)



定理 2.6 (各点射影モデル構造)

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上のモデル構造であって、次を満たすものが存在する。

- 射 f が弱同値 $\Leftrightarrow f_{\{x\}} : \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が弱同値 (for $x \in B$)
- 射 f が *fibration* $\Leftrightarrow f_{\{x\}} : \mathcal{F}(\{x\}) \rightarrow \mathcal{G}(\{x\})$ が *fibration* (for $x \in B$)

証明

次の随伴に推移定理を用いればよい。

$$\prod_{x \in B} \mathbf{qTop} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \top \\ \longrightarrow \end{array} PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$$

□

このモデル構造を **各点射影モデル構造** と呼ぶ。

モデル構造の混合

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上のコンパクト可撓モデル構造 (resp. 各点射影モデル構造) に関する弱同値のクラスを W_{flx}^{cpt} (resp. W_{prj}^{pt}) と書き、fibration のクラスを Fib_{flx}^{cpt} (resp. Fib_{prj}^{pt}) と書く。
この時、次の包含が成り立つ。

$$\begin{aligned} W_{flx}^{cpt} &\subset W_{prj}^{pt} \\ Fib_{flx}^{cpt} &\subset Fib_{prj}^{pt} \end{aligned}$$

二つのモデル構造を混合して、各点可撓モデル構造を構成する。
→ これが求めていたモデル構造である。

次の定理が知られている。

定理 2.7 (混合 (mixed) モデル構造 [1])

圏 \mathcal{C} 上の二つのモデル構造 (W_1, Fib_1, Cof_1) , (W_2, Fib_2, Cof_2) について、次の包含が成立していたとする。

$$\begin{array}{lcl} W_1 & \subset & W_2 \\ Fib_1 & \subset & Fib_2 \end{array}$$

このとき、 \mathcal{C} 上のモデル構造であって、弱同値のクラスが W_2 に一致し、*fibration* のクラスが Fib_1 に一致するものが存在する。

(右) 正則モデル構造

次の命題を示す。

命題 2.8

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の各点可撓モデル構造は右正則である。

定義 2.9 ([4])

モデル圏 \mathcal{C} が右正則 (right proper) であるとは、fibration に沿った弱同値の引き戻しが弱同値になることである。

(右) 正則モデル構造

右正則性には次の性質が知られている。

命題 2.10 ([4])

モデル圏 \mathcal{C} の任意の対象が *fibrant* ならば、 \mathcal{C} は右正則である。

特に、 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の各点射影モデル構造は右正則である。
各点可撓モデル構造における fibration は常に各点射影モデル構造における fibration でもあるので、 $PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上の局所可撓モデル構造は右正則である。

□

定理 3.1 (Y.)

B は強局所可縮な正規空間とする。

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の *ABC prefibration* 構造で、次を満たすものが存在する。

- f が弱同値 $\Leftrightarrow f$ が *stalkwise* に弱ホモトピー同値
- f が *fibration* $\Leftrightarrow f$ が可撓拡張
特に、 \mathcal{F} が *fibrant* $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が可撓 (*flexible*)

これを局所可撓 prefibration 構造と呼ぶ。

定義 3.2 (ABC 圏 [6])

圏 \mathcal{C} が ABC prefibration 圏であるとは、二種の射のクラス $W, Fib \subset Mor(\mathcal{C})$ についていくつかの公理を満たしたものである。
 $f \in W$ であるとき、 f は弱同値 (weak equivalence) であるという。
 $f \in Fib$ であるとき、 f は束 (fibration) であるという。
 $f \in W \cap Fib$ であるとき、 f は自明な束 (trivial fibration) または非輪状束 (acyclic fibration) であるという。

定義 3.3 (ABC 圏の公理)

- 任意の射 f に対し、 $f = p_f \circ i_f$ なる分解で、 p_f が束、 i_f が弱同値となるものが存在する。
さらに、この分解は関手的である。
- + “モデル圏的な” 条件。

埋め込み $Sh(B; \mathbf{qTop}) \rightarrow PSh_*(\mathcal{U}_B; \mathbf{qTop})$ より、 $Sh(B; \mathbf{qTop})$ の局所可撓 prefibration 構造は “モデル圏的な” 条件を自動的に満たす。

分解 $f = p_f \circ i_f$ の存在のみ非自明。

→ Gromov 理論から従う。

定義 3.4 (Gromov [3])

擬位相空間に値を持つ層 \mathcal{F} に対し、前層 \mathcal{F}^\square を次で定める。

$$\mathcal{F}^\square(U) = \mathcal{F}(U)^U$$

前層 \mathcal{F}^\square の層化を \mathcal{F}^* と書き、層 \mathcal{F} の形式的切断 (formal section) の層と呼ぶ。

$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\square \rightarrow \mathcal{F}^*$ なる合成を $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ と書き、これを対角射と呼ぶ。
 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^*$ は関手的であり、対角射は自然変換を与える。

定義 3.5 (Y.)

$Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の任意の $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、 $f^\square: \mathcal{F}^\square \rightarrow \mathcal{G}^\square$ の写像蹟 (mapping track) $\mathcal{F}_{f^\square}^\square \rightarrow \mathcal{G}^\square$ の層化 $\hat{f}: \mathcal{F}_f^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ を f の可撓蹟と呼ぶ。

- 写像蹟は次のように定義される。(四角図式は引き戻し。)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}^\square & \xrightarrow{f^\square} & \mathcal{G}^\square \\
 \uparrow & & \uparrow 1 \\
 \mathcal{F}_{f^\square}^\square & \longrightarrow & (\mathcal{G}^\square)^{[0,1]} \xrightarrow{0} \mathcal{G}^\square
 \end{array}$$

(A curved arrow points from $\mathcal{F}_{f^\square}^\square$ to \mathcal{G}^\square in the bottom row.)

- 可撓蹟は、 $\mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ の写像蹟と同型である。(?)

鍵となるのは次の補題である。

補題 3.6 (Gromov [3], Y.)

B は正規空間かつ強局所可縮（任意の点 $x \in B$ に対し x を強変位レトラクトとする近傍基が存在する）とする。

- $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は *stalkwise* に弱ホモトピー同値である。
- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の任意の $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、可撓蹟 $\hat{f} : \mathcal{F}_f^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ は可撓拡張である。
特に、 \mathcal{F}^* は可撓 (*flexible*) である。

主補題の証明 1

- $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ は stalkwise に弱ホモトピー同値である。

下のような可換図式を考える。斜めの射 h が存在し、上三角を可換にし、下三角を高々 $\partial\Delta^n$ を固定するホモトピーで可換にすることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_x \\ \downarrow & \nearrow \exists h & \downarrow \Delta_x \\ \Delta^n & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}_x^* \end{array}$$

(続く)

主補題の証明 1

x の十分小さい可縮近傍 U をとり、下のような図式を考えればよい。
(米田の補題によりとれる。)

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{h} & \downarrow \Delta_U \\ \Delta^n & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{F}(U)^U \end{array}$$

$x: \mathbf{1} \rightarrow U$ の変位レトラクションを $H: U \times [0, 1] \rightarrow U$ と置く。

H はホモトピー $H': \mathcal{F}(U)^U \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(U)^U$ を導く。

一方、 $x: \mathbf{1} \rightarrow U$ は $\phi_x: \mathcal{F}(U)^U \rightarrow \mathcal{F}(U)^{\mathbf{1}} \cong \mathcal{F}(U)$ を導くが、これは $\phi_x \circ \Delta_U = id$ を満たす。

$\tilde{h} = \phi_x \circ \beta$ とすると、これは上三角を可換にし、下三角をホモトピー $H' \circ \beta$ によって可換にする。

□

主補題の証明 2

- $Sh(B; \mathbf{qTop})$ 上の任意の $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し、可撓蹟 $\hat{f} : \mathcal{F}_f^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ は可撓拡張である。

任意のコンパクト集合の組 $K \subset L \subset B$ をとり、次の射が Serre 束になることを示す。

$$\mathcal{F}^*(L) \rightarrow \mathcal{F}^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L)$$

つまり、次の図式で γ の存在を示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}_f^*(L) \\ \downarrow & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \hat{f} \\ D^n \cong D^{n-1} \times I & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L) \end{array}$$

$X = \mathcal{F}_f^*(L)$, $Y = \mathcal{F}_f^*(K) \times_{\mathcal{G}^*(K)} \mathcal{G}^*(L)$ と置く。

(X および Y は \mathbf{qTop} の元であり、すなわち $\mathbf{Sing}\Delta$ 上の層であることに注意する。)

層 X が単体 D^n に対応させる集合を $X[D^n]$ と書く。

主補題の証明 2

(米田の補題により) $\alpha \in X[D^{n-1}]$, $\beta \in Y[D^n]$ と見なしてよい。
この対応により、 γ の存在は、 (α, β) の $X[D^n] \rightarrow X[D^{n-1}] \times_{Y[D^{n-1}]} Y[D^n]$ による逆像 $\gamma \in X[D^n]$ が存在することと同値である。

$$\begin{array}{ccc} X[D^n] & & \\ \searrow & \xrightarrow{\quad} & \searrow \\ X[D^{n-1}] \times_{Y[D^{n-1}]} Y[D^n] & \longrightarrow & X[D^{n-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y[D^n] & \longrightarrow & Y[D^{n-1}] \end{array}$$

(続く)

主補題の証明 2

十分小さい K の開近傍 U および L の開近傍 V で $U \subset V$ なるものを取り、 K と L の代わりに置き換えてよい。(米田の補題)

$Sh(B; \mathbf{qTop}) \cong Sh(\mathbf{Sing}\Delta; Sh(B; \mathbf{Set}))$ なる対応により、層 \mathcal{P} は各単体 D^n に対して集合の層 $\mathcal{P}[D^n]$ を対応させる。

$\alpha \in X[D^{n-1}] = \mathcal{F}_f^*[D^{n-1}](V)$ は前層 $\mathcal{F}_{f^\square}^\square[D^{n-1}]$ の germ の族として表せる。

また、層 $\mathcal{H} = \mathcal{F}_f^*|_U \times_{\mathcal{G}^*|_U} \mathcal{G}^*$ は前層 $\mathcal{F}_{f^\square}^\square|_U \times_{\mathcal{G}^\square|_U} \mathcal{G}^\square$ の層化である。

$\beta = (\beta^1, \beta^2) \in Y[D^n] = \mathcal{H}[D^n](V)$ も germ の族として表せる。

→ 台関数を用いて、 α と β を連続的に繋ぐ。

(続く)

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha', \omega_\alpha) = \mathcal{F}_f^*[D^{n-1}](V) \subset \mathcal{F}^*[D^{n-1}](V) \times (\mathcal{G}^*)^{[0,1]}[D^{n-1}](V) \\ \beta^1 &= (\beta', \omega_\beta) = \mathcal{F}_f^*[D^n](U) \subset \mathcal{F}^*[D^n](U) \times (\mathcal{G}^*)^{[0,1]}[D^n](U)\end{aligned}$$

と表す。

$$\gamma = (\gamma', \omega_\gamma) = \mathcal{F}_f^*[D^n](V) \subset \mathcal{F}^*[D^n](V) \times (\mathcal{G}^*)^{[0,1]}[D^n](V)$$

を構成する。

(続く)

主補題の証明 2

台関数 $\phi : V \rightarrow [0, 1]$ で $\text{supp}(\phi) \subset U$ を満たし、さらに K を含む開集合上で恒等的に 1 となるものをとる。

また、 $J = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \hookrightarrow [0, 1]^2$ の強変位レトラクト $R_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ で、

- $R_1 = id$
- $Im(R_0) \subset J$
- $R_u([0, 1] \times \{1\}) \subset [0, 1] \times \{1\}$

なるものをとる。

$R_u(s, t) = (r_u(s, t), r'_u(s, t))$ と表せば、 $r_u(s, 1)$ は $\{0\} \hookrightarrow [0, 1]$ の強変位レトラクトである。

主補題の証明 2

$\psi : D^{n-1} \times [0, 1] \times V \rightarrow D^{n-1} \times [0, 1] \times V$ を

$\psi(d, t, x) = (d, r_{\phi(x)}(t, 1), x)$ で定める。

U 上では次の合成を γ' とする。

$$D^{n-1} \times [0, 1] \times U \xrightarrow{\psi} D^{n-1} \times [0, 1] \times U \xrightarrow{\beta'} \mathcal{F}(U)$$

$V' = V - \text{supp}(\phi)$ 上では次の合成を γ' とする。

$$(D^{n-1} \times [0, 1]) \times V' \xrightarrow{pr} D^{n-1} \times V' \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{F}(V')$$

これは上手く貼り合う。

(実際は各 germ を貼り合わせる。)

(続く)

主補題の証明 2

$\Psi : D^{n-1} \times [0, 1] \times [0, 1] \times V \rightarrow D^{n-1} \times [0, 1] \times [0, 1] \times V$ を
 $\Psi(d, s, t, x) = (d, R_{\phi(x)}(s, t), x)$ で定める。
 U 上では次の合成を ω_γ とする。

$$D^n \times [0, 1] \times U \xrightarrow{\Psi} D^n \times [0, 1] \times U \xrightarrow{\omega_\beta} \mathcal{G}(U)$$

$V' = V - \text{supp}(\phi)$ 上では次の合成を ω_γ とする。

$$D^{n-1} \times [0, 1]^2 \times V' \xrightarrow{\Psi} D^{n-1} \times J \times V' \xrightarrow{\beta^2 \cup \omega_\alpha} \mathcal{G}(V')$$

これは上手く貼り合う。
(実際は各 germ を貼り合わせる。)

□

主定理の証明

$PSh_*(\tilde{\mathcal{U}}_B; \mathbf{qTop})$ 上で次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}_f^* & & \\ & \nearrow \simeq & \uparrow & \searrow \hat{f} & \\ \mathcal{F}^* & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}^* \\ \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow \simeq \\ & & \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad f \quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \end{array}$$

$\mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は fibration の引き戻しなので fibration である。
モデル構造が右正則であることから、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_f^* \times_{\mathcal{G}^*} \mathcal{G}$ は弱同値である。

□



Michael Cole.

Mixing model structures.

Topology and its Applications, 153(7):1016–1032, 2006.



M Gromov.

A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities.

Intern. Congr. Math.(Nice 1970), 2:221–225, 1971.



Misha Gromov.

Partial differential relations, volume 9.

Springer Science & Business Media, 2013.



Philip S Hirschhorn.

Model categories and their localizations.

Number 99. American Mathematical Soc., 2009.



Daniel G Quillen.

Homotopical algebra, volume 43.

Springer, 2006.



Andrei Radulescu-Banu.

Cofibrations in homotopy theory.

arXiv preprint math/0610009, 2006.